COMMERCIUM
EPISTOLICUM
D. *JOHANNIS COLLINS*,
ET ALIORUM
DE
ANALYSI
PROMOTA:
JUSSU
SOCIETATIS REGIÆ
In lucem editum.

LONDINI:
Typis PEARSONIANIS, Anno M DCC XII.

Digitized by Google

Digitized by Google

A D

LECTOREM.

Q*UAM ob cauſam editæ ſint hæ Epiſtolæ Chartulæque collectaneæ, apparebit ex Literis D.* Leibnitii *& D.* Keillii *in fine ſubjunctis. Offenſionem attulerant D.* Leibnitio *nonnulla, quæ ſcripto prodidit D.* Keillius *in Actis* Londinenſibus *anno* 1708, *injuriam D.* Newtono *oblatam propulſans. Datis igitur ad Societatis Regalis Secretarium literis, de calumniâ queſtus D.* Leibnitius, *remedium a Societate petiit ; idque eos æquum credidit judicaturos, ut D.* Keillius *culpam ſuam publicè fateretur. D.* Keillio *ea eſt pars viſa potior, ut ad illa, quæ queſtus erat D.* Leibnitius, *literis ſcriptis reſponderet : Quibus in literis quæ anteà ediderat & expoſuit plenius & vindicavit. D.* Leibnitius *nequaquam his ſatis ſibi factum arbitratus, literas alteras ad Societatem dedit ; in quibus adhuc de D.* Keillio *queſtus*, novum *eum* hominem *appellat*, parumque peritum rerum anteactarum cognitorem, nec mandatum ab eo, cujus intereſſet, habentem ; *Societatiſq;* æquitati committit, annon coercendæ ſint vanæ & injuſtæ vociferationes.

Verſabatur in Angliâ *D.* Leibnitius *ineunte anno* 1673, *iterumq; menſe* Octobri 1676 ; *& interjecto illo temporis intervallo in* Galliâ *egit. Quo omni temporis ſpatio, mutuis acceptis datiſq; literis, commercium habuit cum D.* Oldenburgo, *&*, Oldenburgi *operâ, cum D.*Collinio *itidem, & nonnunquam etiam cum D.* Newtono. *Quid autem ille ex* Anglis *tandem, vel tum cùm* Londini *eſſet, vel ex literis iſtis mutuò datis, edidicerit, in eo ferè vertitur hæc omnis quæſtio. D.* Oldenburgus & Collinius *jam diù obierunt ; D.* Newtonus *autem tum* Cantabrigiæ *egit ; parumq; amplius novit, quàm quod ex literis ipſius a D.* Walliſio *deinceps editis apparet. D.* Newtonus *neque a D.* Keillii *partibus Teſtis eſſe poteſt, nec D.* Leibnitius *ipſe a ſuis : Alius autem in vivis Teſtis eſt nullus. Societas itaq; Regalis, a D.*Leibnitio *bis ad-*

verſus

Digitized by Google

Ad Lectorem.

verſus Keillium *appellata, ſelectorum ex Societate arbitrorum conſeſſum conſtituit, qui literas literarumque tranſcriptarum libellos, aliaſque chartulas a* D. Oldenburgo *penes Societatem relictas, & ſiquid inter* D. Collinii *ſchedas repertum huc faceret, perſcrutarentur, Sententiamq; ſuam ad Societatem referrent: juſſitq; tandem ut Sententia illa a ſelectorum arbitrorum conſeſſu relata, unà cum ipſis literarum aliarumque chartularum excerptis, emitteretur.*

Cùm D. Newtonus *Analyſin iſtam ſcripto traderet, quæ ſub initium horum Collectaneorum impreſſa eſt, habuit jam tum †Methodum generalem æquationes finitas in infinitas reſolvendi, & æquationes tum finitas tum infinitas applicandi ad Problemata ſolvenda, ope proportionum Augmentorum momentaneorum Quantitatum naſcentium & augeſcentium. Augmenta hæc appellat D.* Newtonus *Particulas & Momenta; D.* Leibnitius *autem Infiniteſimales, Indiviſibiles & Differentias. Quantitates augeſcentes appellat D.* Newtonus *Fluentes; D.* Leibnitius *autem Summas. Et velocitates augmenti appellat D.* Newtonus *Fluxiones; iſtaſq; Fluxiones exponit per quantitatum fluentium momenta.*

† De hac Methodo ex Methodis Serierum & Fluentium compoſita ſcripſit infra *Newtonus*, pag. 14, 15, 18, 30, 55, 56, 71, 85, 86.

Quæ pars hujus Methodi in eo ſita eſt ut æquationes finitæ in infinitas reſolvantur, eam cum D. Leibnitio, *rogatu ſuo, communicavit D.* Newtonus, *literis ad illum datis* Junii 13. *&* Octobris 24. 1676. *Reliquam hujus Methodi partem, poſtquam eouſq; attigerat ut eam ſatis * obviam factam exiſtimaret; ne ſibi deinceps ſubriperetur priuſquam eam exponere viſum foret, literis occultis ita celavit, quo modo aliàs* Galilæus *atque* Hugenius *fecerant. Hujus poſterioris partis inventionem ſibi vendicat D.* Leibnitius*: D.* Keillius *autem eam D.* Newtono *adſerit;* Keillioq; *ſuffragatur Sententia ſelectorum e Societate arbitrorum conſeſſûs. Alios tamen Exteros, qui methodum iſtam a D.* Leibnitio *acceperint aut aliter obtinuerint, nihil quidquam in his Collectaneis eſt quod ullo pacto afficiat. Illi, quid inter D.* Leibnitium *& D.* Oldenburgum *commercii eſſet, ignorabant. Illis, quòd Methodum, quam utilem eſſe compererant, in rem ſuam adhibuerint atq; excoluerint; id verò laudi eſt dandum.*

* Vid. pag. 72. lin. 1.

Subjunctæ ſunt Epiſtolis Annotationes quædam; quò Lectores, quibus minus eſt otii, & Epiſtolas inter ſe faciliùs conferre, & ſemel perlectas intelligere queant.

Commer-

Digitized by Google

Commercium Epiſtolicum

D. *JOHANNIS COLLINS,*

ET ALIORUM

De Analyſi promota:

JUSSU

SOCIETATIS REGIÆ

In lucem editum.

Excerpta ex Epiſtola reverendi viri D. Iſaaci Barrow *ad D.* J. Collins, Cantabrigiæ 20 Julii 1669 *datâ, cujus habetur Autographon.*

* AMICUS quidam apud nos commorans, qui eximio in his rebus pollet ingenio, nudiuſtertius chartas quaſdam mihi tradidit, in quibus Magnitudinum dimenſiones ſupputandi Methodos, *Mercatoris* methodo pro Hyperbola ſimiles, maxime vero Generales, deſcripſit, ſimulque Æquationes reſolvendi, quæ, ut opinor, tibi placebunt, quas una cum proximis literis ad te mittam.

* A Friend of mine here, that hath an excellent Genius to theſe Things, brought me the other Day ſome Papers, wherein he hath ſet down Methods of calculating the Dimenſions of Magnitudes, like that of Mr. *Mercator* for the Hyperbola, but very general, as alſo of Reſolving Equations, which I ſuppoſe will pleaſe you, and I ſhall ſend them by the next.

Digitized by Google

Ex Epiſtola ejuſdem ad eundem, 31 Julii 1669 *data, pariterque ipſius* Barrovii *manu ſcripta.*

* Mitto quas pollicitus eram Amici chartas, quæ uti ſpero haud parum te oblectabunt. Remittas, quæſo, quum eas quantum tibi viſum fuerit perlegeris; id enim poſtulavit Amicus meus, cum primum eum rogavi, ut eas tecum communicare mihi liceret. Quantocyus igitur, obſecro, te eas recepiſſe fac me certiorem, quod illis metuo, quippe qui eas per Veredarium publicum ad te mittere non dubitaverim, quo tibi morem gererem quam citiſſime.

* I ſend you the Papers of my Friend I promis'd, which I preſume will give you much Satisfaction: I pray, having peruſed them ſo much as you think good, remand them to me, according to his deſire, when I ask'd him the Liberty to impart them to you; I pray give me notice of your receiving them, with your ſooneſt Convenience, that I may be ſatisfied of their Reception; becauſe I am afraid of them, venturing them by the Poſt, that I may not longer delay to correſpond with your deſire.

Ex Epiſtola ejuſdem ad eundem, 20 Auguſti 1669 *data, cujus etiam comparet Autographon.*

** Amici chartas tibi placuiſſe gaudeo; eſt illi nomen *Newtonus*, Collegii noſtri Socius, & juvenis, (ſecundus enim, ex quo Artium Magiſtri gradum cepit, jam agitur annus,) et qui, eximio quo eſt acumine, permagnos in hac re progreſſus fecit. Illas, ſi vis, cum Nobili Domino Vicecomite *Brounkero* communica.

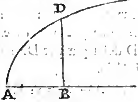
** I am glad my Friend's Paper gives you ſo much Satisfaction; his Name is Mr. *Newton*, a Fellow of our College, and very young, (being but the ſecond Year Maſter of Arts,) but of an extraordinary Genius and Proficiency in theſe Things; you may impart the Papers, if you pleaſe, to my Lord *Brounker*.

Exem-

Exemplar diƈtarum chartarum, manu D. Collins *exaratum & in ſcriniis ejus repertum, quod cum ipſius D.* Newtoni *Autographo collatum ad verbum conſentire invenimus. Hujus autem titulus eſt*

DE ANALYSI PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem menſuranda, olim excogitaveram, in ſequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonſtratam habes.



Basi *AB* Curvæ alicujus *AD*, ſit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & ſint *a*, *b*, *c*, &c. Quantitates datæ, & *m*, *n*, Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.

REG. I. *Si* $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Area ABD.*

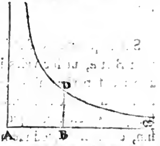
Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 \ (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc eſt, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABD.

2. Si $4\sqrt{x} \ (= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} \ (= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3})$ = ABD.

3. Si $\sqrt[3]{x^5} \ (= x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} \ (= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8})$ = ABD.

4. Si $\frac{1}{x^2} \ (= x^{-2}) = y$, id eſt, ſi $a = 1 = n$, & $m = -2$;



Erit $(-\frac{1}{1}x^{-\frac{1}{1}} =) -x^{-1} \ (= -\frac{1}{x}) = \alpha$BD, infinite verſus *α* protenſæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}} \ (= x^{-\frac{3}{2}}) = y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}} =) \frac{2}{-\sqrt{x}}$ = BD*α*.

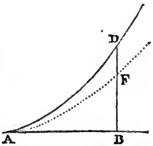
6. Si $\frac{1}{x} \ (= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}\times 1 = \frac{1}{0}$ = Infinitæ, qualis eſt Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

Com-

Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

R E G. II. *Si valor ipſius* y *ex pluribus iſtiuſmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a ſingulis Terminis emanant.*

Exempla Prima.



Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

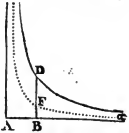
Etenim ſi ſemper ſit $x^2 =$ BF, et $x^{\frac{3}{2}} =$ FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3 =$ ſuperficiei AFB deſcriptæ per Lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ AFD deſcriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ toti ABD.

Sic ſi $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Et ſi $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 =$ ABD.

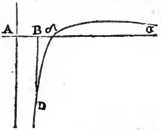
Exempla Secunda.

Si $x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha$BD. Vel ſi $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha$BD.



Quarum ſigna ſi mutaveris habebis Affirmativum valorem ($x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}$) ſuperficiei αBD, modo tota cadat ſupra baſim ABα.

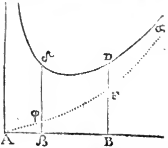
Sin aliqua pars cadat infra (quod ſit cum Curva decuſſat ſuam Baſin inter B et α, ut hic vides in δ,) iſta parte a parte ſuperiori ſubducta, habebis valorem Differentiæ: Earum vero Summam ſi cupis, quære utramque Superficiem ſeorſim, et adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.



Exempla

Exempla Tertia.

Si $x^2 + x^{-2} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$ = Superficiei deſcriptæ. Sed hic notandum eſt, quod dictæ Superficiei partes ſic inventæ jacent ex diverſo latere Lineæ BD.



Nempe, poſito x^2 = BF, & x^{-2} = FD; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABF Superficiei per BE deſcrip-:æ, & $-x^{-1}$ = DFα Superficiei deſcriptæ per DF.

Et hoc ſemper accidit cum Indices ($\frac{m+n}{n}$) rationum Baſis x in valore Superficiei quæſitæ, ſint variis ſignis affecti. In hujuſmodi Caſibus, pars aliqua BDδβ Superficiei media (quæ ſola dari poterit, cum Superficies ſit utrinque infinita) ſic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Baſin Aβ pertinentem, a Superficie ad majorem Baſin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Baſium inſiſtentem. Sic in hoc Exemplo.

Si AB = 2, & Aβ = 1; Erit βBDδ = $\frac{17}{6}$:

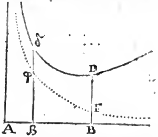
Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. ABF — DFα) erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ ſive $\frac{13}{6}$; Superficies ad Aβ pertinens (viz. Aφβ − δφα) erit $\frac{1}{3} - 1$, ſive $-\frac{2}{3}$: earum differentia (viz. ABF — DFα — Aφβ + δφα = βBDδ) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ ſive $\frac{17}{6}$.

Eodem modo, ſi Aβ = 1, AB = x; Erit βBDδ = $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.

Sic ſi $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{5}} = y$, & Aβ = 1;

Erit βBDδ = $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$.

Denique notari poterit quod ſi quantitas x^{-1} in valore ipſius y reperiatur, iſte Terminus (cum Hyperbolicam ſuperficiem generat) ſeorſim a reliquis conſiderandus eſt.



Ut ſi $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$: Sit x^{-1} = BF, $x^2 + x^{-3}$ = FD, ac Aβ = 1; Et erit δφFD = $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur.

Quare, ſi reliqua Superficies βφFB, quæ Hyperbolica eſt, ex Calculo aliquo ſit data, dabitur tota βBDδ.

 Aliarum

Aliarum Omnium Quadratura.

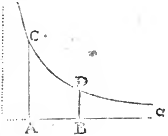
R E G. III. *Sin valor ipſius* y, *vel aliquis ejus Terminus ſit præcedentibus magis compoſitus, in Terminos Simpliciores reducendus eſt; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes ſolvunt; & ex iſtis Terminis quæſitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.*

Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x} = y$; Curva nempe exiſtente Hyperbola.

Jam ut Æquatio iſta a Denominatore ſuo liberetur, Diviſionem ſic inſtituto.

$$
\begin{array}{l}
b+x)\ aa+0\ \left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \text{\&c.}\right. \\
\quad aa+\frac{aax}{b} \\
\hline
\quad 0-\frac{aax}{b}+0 \\
\quad -\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\
\hline
\qquad 0+\frac{aax^2}{b^2}+0 \\
\qquad +\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3} \\
\hline
\qquad\quad 0-\frac{aax^3}{b^3}+0 \\
\qquad\quad -\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4} \\
\hline
\qquad\qquad 0+\frac{aax^4}{b^4} \\
\qquad\qquad \text{\&c.}
\end{array}
$$



Et ſic vice hujus $y = \frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. ſerie iſtac infinite continuata; Adeoque (per Regulam Secundam) Area quæſita ABDC æqualis erit ipſi $\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$, &c. infinitæ etiam ſeriei, cujus tamen Termini pauci initiales ſunt in uſum quemvis ſatis èxacti, ſi modo x ſit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, ſi ſit $\frac{1}{1+xx} = y$, Dividendo prodibit $y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$, &c. Unde (per Regulam Secundam) erit ABDC $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$, &c.

Vel

Vel ſi Terminus xx ponatur in diviſore primus, hoc modo $xx + 1$), rodibit $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$, &c. pro valore ipſius y; Unde (per Regulam Secundam)
rit $BDa = -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7}$, &c. Priori modo procede um x eſt ſatis parva, poſteriori cum ſatis magna ſupponitur.

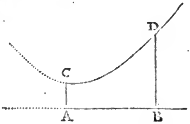
Denique ſi $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; Dividendo prodit
$x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit
$BDC = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem Extrahendo.

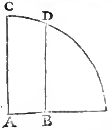
Si ſit $\sqrt{aa + xx} = y$, Radicem ſic extraho,

$$aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}\right. \text{ \&c.}$$

$$\begin{array}{l}
aa \\
\hline
0 + xx \\
\quad xx + \frac{x^4}{4a^2} \\
\hline
\quad 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\
\qquad - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\
\hline
\qquad\quad 0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
\qquad\qquad + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{\&c.}
\end{array}$$

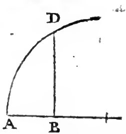


Inde, pro Æquatione $\sqrt{aa + xx} = y$, nova producitur, viz.
$= a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) Area quæſita
DC erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.
ıæc eſt Quadratura Hyperbolæ.
odem modo, ſi ſit $\sqrt{aa - xx} = y$, ejus Radix erit
$\frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c.
oque Area quæſita ABDC erit
alis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.
æc eſt Quadratura Circuli



Vel

Vel ſi ponas $\sqrt{x-xx}=y$; erit Radix æqualis infinitæ ſeriei
$x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c.
Et Area quæſita ABD æqualis erit
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$. &c.
ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{28}x^3-\frac{1}{72}x^4-\frac{5}{704}x$ &c.
Et hæc eſt Area Circuli quadratura.



Si $\dfrac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}=y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ;) Extrahendo radicem utramq; prodit

$$\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6-\frac{5}{128}a^4x^8}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6-\frac{5}{128}b^4x^8}\ \&c.$$

Et Dividendo, ſicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$1\begin{array}{l}+\frac{1}{2}bx^2\\+\frac{1}{2}a\end{array}\quad\begin{array}{l}+\frac{3}{8}b^2x^4\\+\frac{1}{4}ab\\-\frac{1}{8}a^2\end{array}\quad\begin{array}{l}+\frac{5}{16}b^3x^6\\+\frac{3}{16}ab^2\\-\frac{1}{16}a^2b\\+\frac{1}{16}a^3\end{array}\quad\begin{array}{l}+\frac{35}{128}b^4x^8\ \&c.\\+\frac{5}{32}ab^3\\-\frac{3}{64}a^2b^2\\+\frac{1}{32}a^3b\\-\frac{5}{128}a^4\end{array}$$

Adeoque Aream quæſitam $x\begin{array}{l}+\frac{1}{6}bx^3\\+\frac{1}{6}a\end{array}\quad\begin{array}{l}+\frac{3}{40}b^2x^5\ \&c.\\+\frac{1}{20}ab\\-\frac{1}{40}a^2\end{array}$

Sed obſervandum eſt, quod Operatio non raro abbreviatur per debitam Æquationis preparationem, ut in allato Exemplo $\dfrac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}=y$.
Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit
$\dfrac{\sqrt{1+ax^2-abx^4 \atop -b}}{1-bx^2}=y$, & reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantum, & dividendo per Denominatorem.

Ex hiſce, credo, ſatis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipſius y (quibuſcunque Radicibus vel Denominatoribus ſit perplexus, ut hic videre eſt; $x^3+\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}}-\dfrac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+x^2}-\sqrt{2x-x^{\frac{2}{3}}}}=y$) in ſeries Infinitas ſimplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæſita Superficies cognoſcetur.

Exem-

Exempla per Reſolutionem Æquationum.

Numeralis Æquationum affectarum Reſolutio.

Quia tota difficultas in Reſolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illuſtrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, reſolvenda: Et ſit 2, numerus qui minus quam decima ſui parte differt a Radice quæſita. Tum pono $2 + p = y$, & ſubſtituo hunc ipſi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda eſt, ut quotienti addatur: Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, ſive $p = 0,1$ prope veritatem eſt; itaque ſcribo 0,1 in quotiente, & ſuppono $0,1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut prius ſubſtituto, unde prodit $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2,10000000$ $- 0,00544853$ $+ 2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+ y^3$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$- 2y$	$- 4 - 2p$
	$- 5$	$- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+ p^3$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$
	$+ 6p^2$	$+ 0,06 + 1,2 + 6,0$
	$+ 10p$	$+ 1, + 10,$
	$- 1$	$- 1,$
	Summa	$+ 0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$- 0,0054 + r = q$	$+ 6,3q^2$	$+ 0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$
	$+ 11,23q$	$- 0,060642 + 11,23$
	$+ 0,061$	$+ 0,061$
	Summa	$+ 0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$0,00004854 + s = r$		

Et cum $11,23q + 0,061$ veritati prope accedit, ſive fere ſit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ, quot locis primæ Figuræ hujus & principalis quotientis excluſive diſtant) ſcribo $-0,0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa ſit. Et ſupponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius ſubſtituto, & operam ſic produco quo uſq; placuerit. Verum ſi ad bis tot figuras tanquot in quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare

tinuare cupiam, pro q ſubſtituto $-0{,}0054+r$ in hanc $6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem ſuam neglecto, & prodit $6{,}3r^2+11{,}16196r+0{,}000541708=0$, fere, ſive (rejecto $6{,}3r^2$) $r=\frac{-0{,}000541708}{11{,}16196}=-0{,}00004853$ fere, quam ſcribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa ſubducens habeo 2,09455147 Quotientem quæſitam.

Æquationes plurium dimenſionum nihilo ſecius reſolvuntur, & operam ſub fine, ut hic factum fuit levabis, ſi primos ejus terminos gradatim omiſeris.

Præterea notandum eſt quod in hoc exemplo, ſi dubitarem an $0{,}1=p$ veritati ſatis accederet, pro $10p-1=0$, finxiſſem $6p^2+10p-1=0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente ſcripſiſſem; & ſecundam vel tertiam Quotientis figuram ſic explorare convenit, ubi in Æquatione iſta ultimo reſultante quadratum coefficientis penultimi termini, non ſit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

Imo laborem plerumque minues præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem radicum) ex tribus ultimis terminis Æquationis noviſſime reſultantis) exquiras: Iſto enim modo figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus reſolvendi Æquationes pervulgata an ſit neſcio, certe mihi videtur præ reliquis ſimplex, & uſui accommodata. Demonſtratio ejus ex ipſo modo operandi patet, unde cum opus ſit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini deſint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio ſemper relinquitur, cujus Radix una cum acquiſita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propoſitæ. Unde Examinatio Operis hic æque poterit inſtitui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem a Radice primæ Æquationis (ſicut Analyſtis notum eſt) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo treſve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hic eſt, iſtud in Operatione ſubſtituendi quantitates unas pro aliis reperietur. Id quod varie perficias, at ſequentem modum maxime expeditum puto, præſertim ubi Numeri Coefficientes conſtant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ ſubſtituenda pro y in hanc $y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$. Et cum iſta poſſit reſolvi in hanc formam

$\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$. Æquatio nova ſic generabitur $\overline{p-1}$ in $\overline{p+3}=p^2+2p-3$. & $\overline{p^2+2p+2}$ in $\overline{p+3}=p^3+5p^2+8p+6$. & $\overline{p^3+5p^2+8p-6}$ in $\overline{p+3}=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. & $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

Literalis

Literalis Æquationum affectarum Reſolutio.

His in numeris ſic oſtenſis: Sit Æquatio literalis $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, reſolvenda.

Primum inquiro valerem ipſius y cum x ſit nulla, hoc eſt, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio eſſe $+a$. Itaque ſcribo $+a$ in Quotiente, & ſupponens $+a+p=y$, ſubſtituo pro y valorem ejus, & Terminos inde reſultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, *&c.*) margini appono; Ex quibus aſſumo $+4a^2p + a^2x$ terminos utique ubi p & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & eos nihilo fere æquales eſſe ſuppono, ſive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et ſcribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, ſubſtituo $-\frac{1}{4}x + q$ pro p; Et terminos inde reſultantes iterum in margine ſcribo, ut vides in annexo ſchemate, & inde aſſumo Quantitates $+4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utiq; q & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, ſive $q = +\frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+\frac{xx}{64a}$ Quotienti, ſubſtituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; & ſic procedo quo uſque placuerit.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} - \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \text{ \&c.}$$

$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$
	$+a^2y$	$+a^3 + a^2p$
	$+axy$	$+a^2x + axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x + 4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 + axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a} + r = q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$-\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$

$$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} \left(+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}\right.$$

Sin

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo termino (q^3) Æquationis noviſſime reſultantis miſſo, & iſta etiam parte ($-\frac{3}{4}xq^2$) ſecundi, ubi x eſt tot dimenſionum quot in penultimo termino Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2 + 4a^2q$, &c.) margini adſcriptos ut vides, ſubſtituo $\frac{x^2}{64a} + r$ pro q; & ex ultimis duobus terminis ($\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3 + \frac{9}{32}x^2r - \frac{3}{2}axr + 4a^2r$) Æquationis inde reſultantis, facta diviſione $4a^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{9}{32}x^2$) $+ \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}$ (elicio $+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens iſta ($a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam ſecundam, dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2} + \frac{509x^5}{81920a^3}$, &c. pro Area quæſita, quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x ſit minor.

Alius modus eaſdem Reſolvendi.

Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x ſit major; Exemplum eſto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc reſoluturus excerpo terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$ in quibus x & y vel ſeorſim, vel ſimul multiplicatæ, ſunt & plurimarum, & æqualium ubique dimenſionum; & ex iis quaſi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio eſſe x, & in Quotiente ſcribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x ſubſtituta) Radicem extraho quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotiente ſcribo. Denique pono $x + p = y$, & ſic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x + \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. adeoque Aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \left|\frac{aa}{64x}\right| - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$, de qua vide exempla tertia Regulæ ſecundæ. Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modo x & a ſibi invicem ibi ſubſtituantur, ut non opus eſſet aliud Reſolutionis exemplum hic adjungere.

Area autem ($\frac{xx}{2} - \frac{ax}{4} + \left|\frac{aa}{64x}\right|$ &c. terminatur ad Curvam quæ juxta Aſymptoton aliquam in infinitum ſerpit; & Termini initiales ($x - \frac{1}{4}a$) valoris extracti de y, in Aſymptoton iſtam ſemper terminantur; unde portionem Aſymptoti facile invenies. Idem ſemper notandum eſt cum Area deſignatur terminis plus pluſque diviſis per x continue, præterquam quod vice Aſymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis compoſita.

Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad inſtar Ellipſium flexis; de altero modo per exemplum $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſupra oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in numeratoribus quotientis perpetuo augeantur) anıotabo ſequentia.

1. Si quando accidit quod valor ipſius y, cum x nullum eſſe fingitur, ſit quantitas ſurda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua deſignare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſi radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuiſſet ſurda vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro ea ponendam; & reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in Quotiente, ſuppono $b + p = y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. reſultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quod b ſupponitur Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2+a^2}$ quotienti apponendum, & $-\frac{abx}{3b^2+a^2}$ $+ q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0. \quad \text{Sit } cc = 3b^2 + a^2.$$

$$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{a^5b^3x^4}{a^{10}}, \text{ \&c.}$$

$b + p = y$	$+ y^3$	$+ b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$
	$+ axy$	$+ abx + axp$
	$+ aay$	$+ aab + aap$
	$- x^3$	$- x^3$
	$- 2a^3$	$- 2a^3$
$\frac{-abx}{cc} + q = p$	p^3	$- \frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+ 3bp^2$	$+ \frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2}q$, &c.
	$+ axp$	$- \frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$
	$+ ccp$	$- abx + ccq$
	$- x^3$	$- x^3$
	$+ abx$	$+ abx$

$$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc}\Big) \frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} \Big(\frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8}, \text{ \&c.}$$

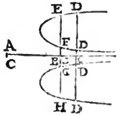
Completo opere, ſumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3 + a^2y - {}^3 = 0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſupra reſolvo; & radicem ıs pro b ſubſtituo..

2. Si dictus valor ſit nihil, hoc eſt ſi in æquatione reſolvenda nullus ſit minus niſi qui per x vel y ſit multiplicatus, ut in hac $y^3 - axy + x^3$ 0; tum terminos ($- axy + x^3$) ſeligo in quibus x ſeorſim & y etiam ſeım ſi fieri poteſt, alias per x multiplicata, ſit minimarum dimenſionum. illi dant $+ \frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$ pro y ſubſtituendum.

Digitized by Google

endum. In hac $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y - x^3$, vel ex $y^3 - a^2y$ elicere.

3. Si valor iſte ſit imaginarius, ut in hac $y^4 + y^2 - 2y + 6 - x^2y^2 - 2x + x^2 + x^4 = 0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadat realis.



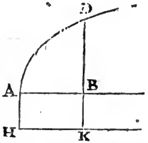
Sic in annexo ſchemate, cum AC (x) nulla eſt, tum CD (y) eſt imaginaria.

Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum poſito quod BC (x) ſit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet poteſt eſſe primus terminus quotientis, prout ſuperficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC deſideratur. In aliis etiam caſibus, ſi quando hæſitas, te hoc modo extricabis.

Deniq; ſi index poteſtatis ipſius x vel y ſit fractio, reduco ipſum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$. Poſitio $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, reſultabit $v^6 - z^3v + z^4 = 0$, cujus radix eſt $v = z + z^3$, &c. ſive (reſtituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant. Imo cum Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & ſuperficie ſolidorum, deque Centro Gravitatis, poſſunt eo tandem reduci ut quæratur quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus eſt quicquam de iis adjungere. In iſtis autem quo ego operor modo dicam breviſſime.

Applicatio prædictorum ad reliqua iſtiuſmodi Problemata.



Sit ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK eſt unitas. Et cogita * rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK deſcribere; & quod BK (1) ſit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quod ex momento BD perpetim dato, poſſis, per prædictas regulas, aream ABD ipſo deſcriptam inveſtigare, ſive cum AK (x) momento 1 deſcripta conferre.

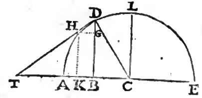
Jam qua ratione Superficies ABD ex momento ſuo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eadem quælibet alia quantitas ex momento ſuo ſic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

* N. B. Hic deſcribitur Methodus per Fluentes & earum Momenta. Hæc Momenta a D. *Leibnitio* Differentiæ poſtmodum vocata ſunt: Et inde nomen *Methodi Differentialis.*

Longitudine

Longitudines Curvarum invenire.

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo eſt indaganda. Ducto angente DHT, & completo indefinite parvo rectangulo HGBK, & poſito AE=1=2AC. * Erit ut BK ſive GH, momentum Baſis AB (x), ad HD momentum Arcus AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ ſive



$\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ eſt momentum Arcus AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Quare, per regulam ſecundam, longitudo Arcus AD eſt $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ &c. ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, &c.

Non ſecus ponendo CB eſſe x, & radium CA eſſe 1, invenies Arcum LD eſſe $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c.

Sed notandum eſt quod unitas iſta quæ pro momento ponitur eſt Superficies cum de Solidis, & linea cum de ſuperficiebus, & punctum cum lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in punctis, ſive lineis infinite parvis, ſi quidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodo Indiviſibilium.

Ex his fiat conjectura de ſuperficiebus & quantitatibus ſolidorum, ac Centris Gravitatum.

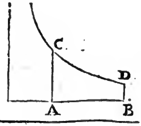
Invenire prædictorum converſum.

Verum ſi e contra ex area vel longitudine &c. Curvæ alicujus data longitudo Baſis AB deſideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix de x.

Inventio Baſis ex Area data.

Ut ſi ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x} = y$), cupiam baſim AB inveſtigare, area iſta nominata, extraho radicem hujus z(ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis terminis in quibus x eſt plurium dimenſionum quam z in quotiente deſideratur.

Ut ſi vellem quod z ad quinque tantum



* Exemplum calculi per Momenta fluentium.

dimenſiones

dimenſiones in quotiente aſcendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, &c. & radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5$, &c.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z + p$
	$-z$.	$-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{4}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

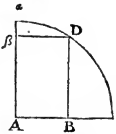
Analyſin ut vides exhibui propter adnotanda duo ſequentia.

1. Quod inter ſubſtituendum, iſtos terminos ſemper omitto quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei regula eſto, quod poſt primum terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem non addo plures terminos dextrorſum quam iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ unitatibus diſtat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimenſio eſt 5, omiſi omnes terminos poſt z^5, poſt z^4 poſui unicum, & duos tantum poſt z^3. Cum radix extrahenda (x) ſit parium ubique, vel imparium dimenſionum, hæc eſto regula ; Quod poſt primum terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem non addo plures terminos dextrorſum, quam iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ binis unitatibus diſtat ; vel ternis unitatibus, ſi indices dimenſionum ipſius x unitatibus ubique ternis a ſe invicem diſtant, & ſic de reliquis.

2. Cum video p, q, vel r, &c. in æquatione noviſſime reſultante eſſe unius tantum dimenſionis, ejus valorem, hoc eſt, reliquos terminos quotienti addendos, per diviſionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio

Inventio Baſis ex data Longitudine Curvæ.



Si ex dato arcu αD Sinus AB deſideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. ſupra inventæ, (poſito nempe AB $= x$, αD $= z$, & Aα $= 1$,) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Et præterea ſi Coſinum Aβ ex iſto arcu dato cupis, fac Aβ $(= \sqrt{1-xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

De Serie progreſſionum continuandâ.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis iſtarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia obſervata poteris ad arbitrium producere. Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. produces, dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

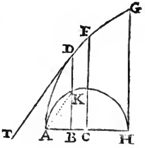
Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2x3, 4x5, 6x7, 8x9, 10x11, &c.

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1x2, 3x4, 5x6, 7x8, 9x10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times8}{8\times9}$, &c. Et ſic in reliquis.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

At hæc de Curvis Geometricis dicta ſufficiant. Quinetiam Curva etiamſi Mechanica ſit, methodum tamen noſtram nequaquam reſpuit.



Exemplo ſit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota qua deſcribitur. Et quæratur Superficies ABD. Jam poſito AB $= x$, BD $= y$, ut ſupra, & AH $= 1$; primo quæro Longitudinem ipſius BD. Nempe ex natura Trochoidis eſt KD $=$ arcui AK. Quare tota BD $=$ BK $+$ arc. AK. Sed eſt BK $(= \sqrt{x-xx}) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus AK $= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

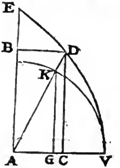
Vel brevius ſic: Cum recta AK tangenti TD parallela ſit, erit AB ad BK ſicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc eſt $x : \sqrt{x-xx} :: 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x-xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

F

Quare

Quare (per Reg. 2.) BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c.
Et ſuperficies ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non diſſimili modo (poſito C centro circuli, & CB $= x$) obtinebis aream CBDF, &c.



Sit area ABDV Quadratricis VDE(cujus vertex eſt V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ducta qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG : AG : : AB (x) : BD (y), ſive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verum ex natura Quadratricis eſt BA (= DC) = arcui VK, ſive VK $= x$. Quare poſito AV $= 1$, erit GK $= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. ex ſupra oſtenſis, & GA $= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c.

Adeoque $y \left(= \frac{x \times AG}{KG}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^5}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6}$, &c. ſive, diviſione facta, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6$, &c. & (per Reg. 2.) area AVDB $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis eſt.

Nec quicquam hujuſinodi ſcio ad quod hæc methodus, idque variis modis, ſeſe non extendit. Imo tangentes ad Curvas Mechanicas (ſi quando id non alias fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analyſis per æquationes ex finito terminorum numero conſtantes (quando id ſit poſſibile) perficit, hæc per æquationes infinitas ſemper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analyſis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa ſunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines & rationis finitæ nec deſignare neque ita concipere poſſimus, ut quantitates inde deſideratas exacte cognoſcamus: Sicut radices ſurdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita poſſunt exhiberi, ut alicujus quantitas a reliquis diſtincta exacte cognoſcatur.

Denique ad Analyticam merito pertinere conſeatur, cujus beneficio Curvarum areæ & longitudines &c. (id modo fiat) * exacte & Geometrice determinentur. Sed iſta narrandi non eſt locus. Reſpicienti duo præ reliquis demonſtranda occurrunt.

1. *Demonſtratio quadraturæ curvarum ſimplicium in Regula prima.*

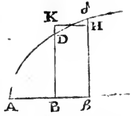
Præparatio pro Regula prima demonſtranda.

† Sit itaque curvæ alicujus ADδ Baſis AB $= x$, perpendiculariter applicata BD $= y$, & area ABD $= z$, ut prius. Item ſit B$\beta = o$,

* N. B. Quadratura Curvarum per Æquationes infinitas, quæ nonnunquam terminantur & finitæ evadunt.

† Exemplum luculentum Calculi per momenta Fluentium.

Digitized by Google



BK $= v$, & rectangulum BβHK (ov) æquale ſpatio BβδD.

Eſt ergo A$\beta = x + o$, & Aδ$\beta = z + ov$. His præmiſſis, ex relatione inter x & z ad arbitrium aſſumpta quæro p iſto, quem ſequentem vides, modo.

Pro lubitu ſumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, ſive $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Tum $x + o$ (Aβ) pro x, & $z + ov$ (Aδβ) pro z ſubſtitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura Curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et ſublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam ſupponamus Bβ in infinitum diminui & evaneſcere, ſive o eſſe nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evaneſcent, quare reſtabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, ſive $\frac{2}{3}xx$ $(=zy)$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, ſive $x^{\frac{1}{2}}$ $(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}) = y$. Quare e contra ſi $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonſtratio.

Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; ſive, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m + n = p$, ſi $cx^{\frac{p}{n}} = z$, ſive $c^n x^p = z^n$: tum $x + o$ pro x, & $z + ov$ (ſive, quod perinde eſt, $z + oy$) pro z, ſubſtitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis $c^n x^p$ & z^n æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $c^n p x^{p-1} = nyz^{n-1}$ $(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}})$ ſive dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$, ſive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m + n$ pro p, hoc eſt, m pro $p - n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, ſi $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio Curvarum quæ poſſunt quadrari.

Hinc in tranſitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ ſunt cognitæ, * poſſunt inveniri; ſumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & baſin x, ut inde quæratur applicata y. Ut ſi ſupponas $\sqrt{aa + xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa + xx}} = y$. Et ſic de reliquis.

* Hac Propoſitione ex æquatione Fluentes involvente inveniuntur Fluxiones.

2. Demon-

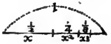
Digitized by Google

2. *Demonſtratio reſolutionis æquationum affectarum.*

Alterum demonſtrandum eſt literalis æquationum affectarum reſolutio. Nempe quod Quotiens, cum x ſit ſatis parva, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo diſtat ab exacto valore ipſius y, tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta ſit ipſi y æqualis. Quod ſic patebit.

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum p, q, r, &c. ſunt radices, quantitas illa in qua x eſt minimæ dimenſionis (hoc eſt, pluſquam dimidium iſtius ultimi termini, ſi ſupponis x ſatis parvam eſſe) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iſte ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorſus evaneſcet ſi opus infinite continuatur.

Nempe ſi $x = \frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x + x^2 + x^3 + x^4$, &c. Et x^2 dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, &c. Itaque ſi $x \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x pluſquam dimidium omnium $x + x^2 + x^3$, &c. Et x^2 pluſquam dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4$, &c. Sic ſi $\frac{x}{b} \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x pluſquam dimidium omnium $x + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{bb}$, &c. Et ſic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decreſcunt perpetuo, vel ſi quando increſcant, tantum opus eſt ut x aliquoties adhuc minor ſupponatur.



2. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evaneſcat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino ſimul evaneſcat.

3. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuo decreſcit donec tandem, cum opus in infinitum producitur, penitus evaneſcat.

4. Sed valores iſtarum p, q, vel r, &c. una cum quotiente eatenus extracta adæquant radices æquationis propoſitæ (Sic in reſolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ ſupra oſtenſa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, &c.) Unde ſatis liquet propoſitum quod quotiens infinite producta eſt una ex valoribus de y.

Idem patebit ſubſtituendo quotientem pro y in æquatione propoſita. Videbis enim terminos illos ſeſe perpetuo deſtruere in quibus x eſt minimarum dimenſionum.

Excerpta

Digitized by Google

Excerpta ex Epiſtola D. Oldenburgh *ad D.* Renatum Franciſcum Sluſium *Canonicum* Leodienſem, *Anno* 1669, 14 Septembris St. vet. *datâ: cujus Apographum conſpicitur in Libro* Societatis Regiæ, *quo conſervantur Epiſtolæ*, N°. 3. *pag.* 174.

INſuper communicavit ille [*Barrovius*] univerſalem Methodum Analyticam, ipſi tranſmiſſam a D. *Iſaaco Newtono*, inſervientem menſurandis Areis omnium ejuſmodi Curvarum, & earundem Perimetrorum, in quibus Ordinatæ eandem habet communem habitudinem ad Baſin: Hæcque methodus alia non eſt ab illa, quam particulariter applicuit D. *Mercator* ad inveniendas areas Hyperbolæ, univerſalis reddita. Auctor ſic incipit.

" *De Analyſi per Æquationes numero terminorum infinitas.*

" Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam
" terminorum ſeriem menſuranda, olim excogitaveram, &c.

Et poſtquam ejus beneficio oſtendit complurium Curvarum Quadraturam, accedit ad Circulum; & convertendo $\sqrt{aa+bb}$, vel $\sqrt{aa-bb}$ in Seriem infinitam, oſtendit complures ejuſmodi Series applicari poſſe ad Circulum, adeo ut datis horum quibuſlibet duobus; Radio nempe, Sinu, Arcu, & Area Segmenti, reliquorum quodvis inveniri poſſit infinite verum: (res ni fallor ab omnibus Auctoribus prægreſſis valde expetita) Ejuſdem etiam adminiculo eximie facilitavit inventionem Radicis Æquationis cujuſlibet, & mediarum Proportionalium; & Seriem largitur ad inveniendam lineæ Ellipticæ longitudinem. Similiter, ut oſtenderet methodum ſuam ad Curvas mechanicas earumque Tangentes ſe porrigere, quadrat Cycloidem ejuſque portiones; Areamque curvæ Quadratricis, ejuſque Perimetrum invenit: Atque ad calcem ſic ait.

" Nec quicquam hujuſmodi ſcio ad quod hæc Methodus, idq; variis
" modis, ſeſe non extendat. Imo Tangentes ad Curvas mechanicas (ſi quando id non alias fiat) hujus ope ducuntur. Et quicquid vulgaris Analyſis
" per æquationes ex finito terminorum numero conſtantes (quando id ſit
" poſſibile) perficit, hæc per Æquationes infinitas ſemper perficiat.

" Et hæc de Areis Curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant. Imo cum Pro-
" blemata de Curvarum Longitudine, de quantitate & Superficie Solido-
" rum, deq; Centro Gravitatis, poſſunt eo tandem reduci ut quæratur
" quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus eſt quic-
" quam de iis adjungere.

 Ex

Ex Epiſtola D. Collins *ad D.* Jacobum Gregorium *Anno* 1669, 25 Novemb. *datâ. Quæ quidem Epiſtola, manu dicti D.* Collins *deſcripta, conſervata eſt.*

B*Arrovius* provinciam ſuam publice prælegendi remiſit cuidam nomine *Newtono* Cantabrigienſi, cujus, tanquam viri acutiſſimo ingenio præditi, in Præfatione Prælectionum Opticarum, meminit: quique antequam ederetur *Mercatoris* Logarithmotechnia, eandem Methodum adinvenerat, eamque ad omnes Curvas generaliter, & ad Circulum diverſimode, applicarat.

Ex Epiſtola D. Jacobi Gregorii *ad D.* J. Collins, *ad Fanum St.* Andreæ *apud* Scotos *Anno* 1670, 20 Aprilis *datâ, prout in Autographo ipſius* Gregorii *legitur.*

SEriem a te miſſam de Circuli Zona intelligere nequeo, nempe $2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7}$ — &c. Si hæc recte deſcripta ſit, Seriem legitimam non eſſe ſuſpicor.

Ex Epiſtola ejuſdem Gregorii *ad eundem, Anno* 1670, 5 Septemb. *data.*

B*Arrovii* [Geometricas] Lectiones ſumma cum voluptate & attentione perlegi; atq; omnes qui unquam hiſce de rebus ſcripſerunt infinito intervallo ſuperaſſe comperio. Ex ejuſdem [*Barrovii*] methodis Tangentes ducendi cum quibuſdam e propriis collatis, inveni Methodum generalem & Geometricam ducendi Tangentes ad omnes Curvas ſine calculo; & quæ complectitur non tantum *Barrovii* Methodos particulares, ſed & ipſius generalem Methodum Analyticam, quam habes ſub finem Lectionis decimæ. Methodus mea haud pluribus quam duodecim continetur Propoſitionibus.

Ex Epiſtola ejuſdem ad eundem Anno 1670, 23 Novemb. *data; cujus etiam conſervatur Autographon.*

PLurimæ approximationes pro Circuli Segmentis ex his facile elici poſſunt; at vix operæ pretium erit, cum poteſtates alternas tollere nequeo; quod factum eſt a D. *Newtono* in ſua Serie, modo Series ſit: (nam ut dicam quod ſentio, ad nullam mearum reducere poſſum) Autumo tamen meam pari facilitate & brevitate rem confecturam.

Ex Autographo D. Jacobi Gregorii *ad eundem D.* Collins, *de Fano St.* Andreæ, 19 Decembris *ejuſdem Anni, miſſo.*

QUum poſtremas ad te dedi literas, nondum animadvertiſſem D. *Newtoni* Seriem de Circuli Zonis (quam jam dudum ad me miſiſti) una cum Infinito iſtiuſmodi Serierum numero, Confectarium illius eſſe poſſe, quam miſi de Logarithmis: nempe, Dato Logarithmo invenire ejus Numerum; vel radicem Poteſtatis cujuſcunq; puræ in infinitam ſeriem permutare.. Me ſane tam tardi fuiſſe ingenii miror, qui tanto temporis ſpatio hoc non animadverteram, quum tamen multum olei & operæ in iſta Serie expiſcanda impenderam. At ut ingenue fatear, ſemper in animum induxeram, ſi modo Series eſſet, me in eam incidere poſſe, ope aliquarum e Seriebus meis pro Circulo inter ſe combinatis, quarum quidem plurimas ad manus habeo; neque ullam aliam deſideraram Methodum. Series tua paululum producta fit $2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5R^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \frac{21B^{13}}{6656R^{11}} - \frac{11B^{15}}{5120R^{13}}$ — &c. Eiſdem etiam poſitis, erit Arcus (cujus Sinus B) $= B + \frac{B^3}{6R^2} + \frac{3B^5}{40R^4} + \frac{5B^7}{112R^6} + \frac{35B^9}{1152R^8}$ + &c. Plures hujuſcemodi Series proferre poſſem; ſed Tu fortaſſe plus meipſo de his rebus noſti.

Ex Epiſtola D. Collins *ad dictum D.* Gregorium, 24 Decembris *Anno* 1670 *data: cujus habetur Exemplar manu ipſius* D. Collins *deſcriptum.*

QUum D. *Dary* * Miſcellanea ſua in lucem edidit, exemplar libelli miſit ad D. *Newtonum*, qui dictum D. *Dary* Serie pro Area Zonæ Circuli, quam ad te miſi, remuneravit; quæ ſine omni dubio Series eſt legitima & eximia: Ope D. *Barrovii* nonnullas alias Series e Methodo *Newtoni* generali derivatas obtinui; eaſque conſerto colloquio deprehendi Analytice deduci poſſe e datis cujuſvis Figuræ proprietatibus; & multas Series ad ſingulas Figuras applicari poſſe. Univerſalem quoque eſſe, cujuſque ope omnes Quadraturas perfici poſſis, tam Curvarum quas *Carteſius* Geometricas eſſe admittit, quam earum quas cenſet Mechanicas.

Hac itaq; methodo Curvæ omnium Figurarum communi proprietate definitarum rectificantur, earum Tangentes & Centra Gravitatis inveniuntur; item Rotunda earum Solida & Segmenta ſecunda cubantur; & in univerſis Curvis, Longitudine curvilinea data, ordinatim applicatæ inveniuntur, & vice verſa.

Exempla quædam.

Arcu z dato, invenire Sinum x vel Co-ſinum y; poſita Unitate pro Radio.

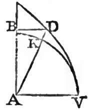
$$x = z - \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{120}z^5 - \tfrac{1}{5040}z^7 + \tfrac{1}{362880}z^9 - \&c.$$

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{24}z^4 - \tfrac{1}{720}z^6 + \tfrac{1}{40320}z^8 - \tfrac{1}{3628800}z^{10} + \&c.$$

Et dato Sinu x, invenire z. $z = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \&c.$

Quadratricem Veterum quod attinet, nulla Methodus, nullus Geometra ejus Aream exhibere valuit. Sit igitur AV Radius circuli inſcripti Unitas, & VK Arcus x, erit Area BDVA

$$= x - \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{225}x^5 - \tfrac{4}{13230}x^7 - \&c.$$



Tractatum hac de re ſcripſit, in quo inventio longitudinis totius vel datæ partis Curvæ *Ellipticæ*, & *Quadratricis* DV, nec non Areæ ſupradictæ, eſt inter Exempla.

N. B. Miſcellanea edidit D. *Michael Dary*, Anno 1669.

Ex

Digitized by Google

Ex Epiſtola D. Jacobi Gregorii *ad D.* Collins, 15 *Februarii Anno* $167\frac{1}{2}$ *data, cujus habetur Autographon.*

EX quo Epiſtolam ad te dedi, tres a te accepi, unam *Decemb.* 15. alteram *Dec.* 24. tertiam 21 *Januarii* nuper elapſi datam.

Quod attinet *Newtoni* Methodum univerſalem, aliqua ex parte, ut opinor, mihi innoteſcit, tam quoad Geometricas quam Mechanicas Curvas. Nihilo tamen minus ob Series ad me miſſas gratias habeo, quas ut remunerem mitto quæ ſequuntur.

Sit Radius $= r$, Arcus $= a$, Tangens $= t$, Secans $= s$,

Et erit $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8}$, &c.

Eritq; $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8}$ &c.

Et $s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7}$ &c.

Sit nunc Tangens artificialis $= t$, & Secans artificialis $= s$, & integer quadrans $= q$,

Erit $s = \frac{a^2}{r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{2520r^7} + \frac{62a^{10}}{28350r^9}$ &c.

Sit $2a - q = e$, & erit $t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8}$ &c.

Sit nunc Secans artificialis 45 *gr.* $= s$, ſitq; $s + l$ Secans artificialis ad libitum, erit ejus Arcus $= \frac{1}{2}q + l - \frac{l^2}{r} + \frac{4l^3}{3r^2} - \frac{7l^4}{3r^3} + \frac{14l^5}{3r^4} - \frac{458l^6}{45r^5}$ &c.

eritq; $2a - q = t - \frac{t^3}{6r^2} + \frac{t^5}{24r^4} - \frac{61t^7}{5040r^6} + \frac{277t^9}{72576r^8}$ &c.

Hic animadvertendum eſt Radium artificialem eſſe o; & ubi inveneris q majorem quam $2a$, ſive artificialem Secantem 45 *gr.* majorem eſſe data Secante, mutanda eſſe Signa, & pergendum ſecundum vulgaris Algebræ præcepta.

Sit Ellipſis cujus alter Semiaxium $= r$, alter $= c$; ex quolibet Curvæ Ellipticæ puncto demittatur in Semiaxem r recta perpendicularis $= a$: erit Curva Elliptica perpendiculari a adjacens $= a + \frac{r^2a^3}{6c^4} + \frac{4r^2c^2a^5 - r^4a^5}{40c^8} + \frac{8c^4r^2a^7 + r^6a^7 - 4c^2r^4a^7}{112c^{12}} + \frac{64c^6r^2a^9 - 48c^4r^4a^9 + 24c^2r^6a^9 - 5r^8a^9}{1152c^{16}}$ &c.

Si determinetur Ellipſeos ſpecies, Series hæc ſimplicior evadet. Ut ſi $c = 2r$, foret Curva prædicta $= a + \frac{a^3}{96r^2} + \frac{3a^5}{2048r^4} + \frac{1153a^7}{4587520r^6} + \frac{3419a^9}{75497472r^8}$ &c.

 Reliquis

Reliquis vero manentibus, ſi Curva prædicta eſſet Hyperbola, prædicta quoq; Series ei inſerviret; ſi modo omnium terminorum partes affirmentur, & negentur totus terminus tertius, totus quintus, ſeptimus *&c.* in locis imparibus.

Gratias ago maximas, tam ob benevolentiam qua mones de meditatis meis publicandis, quam ob perhumanas tuas pollicitationes. Nollem tantam moleſtiam tibi creare, neque mihi in animo eſt quicquam edere, præterquam Quadraturam meam Circuli recuſam, additis quibuſdam nugamentis. Quod attinet Methodum meam inveniendi Radices omnium Æquationum; una ſeries unam tantum prodit Radicem, at pro qualibet radice infinitæ ſunt ſeries. Induſtria autem aliqua opus eſt ad ſeriem rite incipiendam, & ad quam pertineat radicem dignoſcendam. Verum hac de re fuſius forſan aliquando ad te ſcribam. Non eſt quod metuas cuiquam quicquid miſerim communicare, parum enim ſolicitus ſum, utrumne meo an alieno nomine in publicum prodeat.

Ex Epiſtola D. Collins *ad* D. Bertet Pariſiis *tum agentem. Data autem eſt* 21 Februarii, *Anno* 170÷; *ejuſq; exemplar manu ipſius* D. Collins *exaratum conſervatur.*

SYſtema Algebræ integrum componere opus eſt eximium, & dignum cui ab omnibus faveatur; præcipue vero quia quatuor circiter abhinc annis inventa fuit a D. *Iſaaco Newtono* Methodus Analytica generalis, pro Quadratura omnium Spatiorum Curvilineorum, tam in Curvis Geometricis quam Mechanicis communi aliqua proprietate gaudentibus. Hujus ope quicquid a Quadraturis pendet peragitur, ut Rectificatio Curvarum, Inventio Tangentium & Centrorum Gravitatis; rotundorumq; Solidorum, & eorundem Segmentorum ſecundorum & curvarum Superficierum dimenſuratio: (non autem Superficierum Solidorum quorum Axes inclinantur, uti Parabolicorum Conoidum, *&c.* hæc manet difficultas poſteris ſuperanda.) Hæc omnia peraguntur approximando verum in infinitum, abſq; Radicum extractione, ope infinitæ Seriei rationalium, cujuſmodi multæ ad unam eandemq; Figuram diverſimode applicari poſſunt; *v. g.* ad Circulum, una ad inveniendam Aream totius vel partis cujuſvis; alia ad inſcriptas, alia ad adſcriptas *&c*: Ita ut dato Sinu, Tangente vel Secante, inveniri poteſt longitudo Arcus, & vice verſa, ope diverſarum Serierum ad eam rem appropriatarum. Unde fit ut jam calculo facilior inventu ſit Arcus e Sinu dato, & vice verſa, quam e Sinu dato Sinus dupli Arcus. Univerſim autem hoc nihil aliud eſt quam methodus

dus a *Mercatore* uſurpata, in ejus Logarithmotechnia ad Hyperbolam quadrandam, generalis reddita —— D. *Jacobus Gregorius* apud *Scotos* nuperrime incidit in eandem methodum.

Ex Epiſtola D. J. Collins *in Italiam ad D.* Alphonſum Borellum *miſſa; & menſe Decembri Anno* 1671 *data: cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

K*inckhuyſenii* Introductio ad Analyſim Specioſam, quam *Stel-konſt* vocat, a D. *Iſaaco Newtono* prælo parata eſt, qui jam Mathematices Profeſſor apud Cantabrigienſes factus eſt. Huic adjunget ipſius Methodum generalem Quadraturarum Analyticam; cujus ope calculo eruit omnium Curvilinearum Figurarum regularium, communi aliqua proprietate gaudentium, Aream; earundem Curvarum Rectificationem; inventionem Centrorum gravitatis earum; itemq; rotunda Solida & Superficies eorum rotatione genitæ; & Secunda iſtorum Solidorum Segmenta: imo dato quovis Logarithmico Sinu, Tangente vel Secante in Canone, invenire licet Arcum ei competentem, abſq; naturali Sinu, Tangente vel Secante prius invento, & vice verſa; idq; generaliter, ſine ulla Radicum extractione.

Hujus Specimen pro Circulo appoſui.

N. B. *In hujus Epiſtolæ exemplari, locus vacuus Seriei interſerendæ hic relictus fuit.*

Ex Epiſtola ejuſdem D. Collins *ad D.* Franciſcum Vernon *Anglum Pariſiis tum agentem*, Londini 26 *Decembris Anno* 1671 *data: cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

D. *Barrovius* certiorem me facit D. *Newtonum* pene adornaſſe *Kinckhuyſenii* ad Algebram Introductionem (cujus hic brevi edendæ negotium mihi curæ erit) eamq; de propria ipſius penu auctiorem reddidiſſe. Huic ſubjiciet generalem * ſuam infinitarum Serierum metho-

N. B. * *Hic Tractatus unus idemq; eſt ac ille, cujus mentionem fecerat D.* Newtonus *in Epiſtola Octob.* 24. 1676. *data, per D.* Oldenburgum *D.* Leibnitio *communicata; & in quo methodi Serierum infinitarum & Fluxionum ſimul explicabantur, ut ibi loci memorat.*

dum

Digitized by Google

dum Analyticam, cujus ope computantur omnium Spatiorum curvilineorum Areæ, tùm Geometricorum tum eorum quæ ex mente *Carteſii* Mechanica ſunt,(modo Figuræ una aliqua aut pluribus communibus proprietatibus definitæ ſint) ipſarumq; Curvarum longitudines,Centra Gravitatis, rotunda Solida & Superficies eorum rotatione genitæ. Hinc etiam eruuntur multæ pro Circulo Series; necnon quovis numero dato, tanquam Logarithmico Sinu, Tangente vel Secante, calculo perfacili, ſine ulla Radicum extractione, ſine ullis Tabulis, inveniri poteſt Arcus ei reſpondens, & vice verſa; idq; vero quantum velis proxime, abſq; naturali Sinu, Tangente, aut Secante prius invento: tot tantiſq; commodis fœta eſt hæc Doctrina, de qua non niſi comperta loquor! Una cum his mittet viginti Lectiones ejus Opticas, quas D. *Barrovius* opus cenſet quo majus præſens ætas vix protulit. Admonui maturandam ideo eſſe ejus impreſſionem, quoniam D. *Hugenius* tractatum de Dioptrica & de Curvarum evolutione jam molitur. Ille autem contra, ſe magis cupere, ut accepto harum rerum nuncio, *Hugenius* potius excitaretur quam tardaretur; ratus minime veriſimile utriuſq; Hypotheſes vel deductiones eaſdem eſſe poſſe.

Ex Epiſtola D. J. Collins *ad D* Thomam Strode, *26 Julii Anno 1672 data: cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

QUod Geometriam curvarum figurarum ſpectat; hanc tandem generaliter ad Calculum Analyticum reduci poſſe, omnino Orbi literato novum atq; inauditum eſt. Hujus æquationes ſunt Series terminis numero infinitis conflatæ (quorum tamen pauci ſufficiunt communiter) ex notis Curvarum proprietatibus erutæ. Auctorem quod attinet, hujuſq; methodi præſtantiam, hæc accipe.

Menſe *Septembri* 1668, *Mercator* Logarithmotechniam edidit ſuam, quæ ſpecimen hujus Methodi (*i. e.* Serierum Infinitarum) in unica tantum Figura, nempe Quadraturam Hyperbolæ continet. Haud multo poſt quam in publicum prodierat liber, exemplar ejus Cl. *Walliſio Oxoniam* miſi, qui ſuum de eo judicium in *Actis Philoſophicis* ſtatim fecit: aliumq; *Barrovio Cantabrigiam*, qui quaſdam *Newtoni* chartas (qui jam *Barrovium* in Mathematicis Prælectionibus publicis excipit) extemplo remiſit: E quibus & ex aliis, quæ olim ab Auctore cum *Barrovio* communicata fuerant, patet illam Methodum a dicto *Newtono* aliquot annis antea excogitatam & modo univerſali applicatam fuiſſe: ita ut ejus ope in quavis

quavis Figura Curvilinea propoſita, quæ una vel pluribus Proprietatibus definitur, Quadratura vel Area dictæ Figuræ, accurata ſi poſſibile ſit, ſin minus infinite vero propinqua; Evolutio vel longitudo lineæ curvæ; Centrum gravitatis Figuræ; Solida ejus rotatione genita, & eorum Superficies; ſine ulla Radicum Extractione obtineri queant.

Poſtquam intellexerat D. *Gregorius* hanc methodum, a D. *Mercatore* in *Logarithmotechnia* uſurpatam, & *Hyperbolæ* quadrandæ adhibitam, quamq; adauxerat ipſe *Gregorius*, jam univerſalem redditam eſſe, omnibusq; Figuris applicatam; acri ſtudio eandem acquiſivit, multumq; in ea enodanda deſudavit.

Uterq; D. *Newtonus* & *Gregorius* in animo habet hanc methodum exornare: D. *Gregorius* autem D. *Newtonum* primum ejus Inventorem anticipare haud integrum ducit.

Ex Epiſtola D. Collins *ad D.* Newtonum 30 *Julii Anno* 1672 *data, cujus habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

PArandis Seriebus pro extrahendis radicibus in Speciebus [Algebraicis] ad modum *Vieta* [in Numericis] credo D. *Gregorium* haud modicam impendiſſe operam: nihil autem de ea re ſcribere ſuſcipiet, antequam Tu, methodi hujus repertor, proprias de ea lucubrationes in lucem emiſeris; ſed aliis rebus per interim intentus eſt.

Ex Epiſtola D. Newtoni *ad D.* Collins, *Anno* 1672, 10 *Decembris data. Repertum autem eſt ipſius* Newtoni *Autographum in ſcriniis D.* Collins, *una cum ejuſdem exemplari manu D.* Collins *deſcripto.*

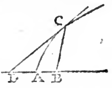
EX animo gaudeo D. *Barrovii* amici noſtri reverendi lectiones Mathematicis exteris adeo placuiſſe, neq; parum me juvat intelligere eos [*Sluſium* & *Gregorium*] in eandem mecum incidiſſe ducendi Tangentes Methodum. Qualem eam eſſe conjiciam ex hoc exemplo percipies. Pone CB applicatam ad AB, in quovis angulo dato, terminari ad quamvis Curvam AC, & dicatur AB x & BC y, habitudoq; inter x & y ex-

I

Digitized by Google

y exprimatur qualibet æquatione, puta $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, qua ipſa determinatur Curva. Regula ducendi Tangentem hæc eſt; multiplica æquationis terminos per quamlibet progreſſionem arithmeticam juxta dimenſiones y, puta

$$\underset{0}{x^3} - \underset{1}{2xxy} + \underset{0}{bxx} - \underset{0}{bbx} + \underset{2}{byy} - \underset{3}{y^3};$$



ut & juxta dimenſiones x, puta

$$\underset{3}{x^3} - \underset{2}{2xxy} + \underset{2}{bxx} - \underset{1}{bbx} + \underset{0}{byy} - \underset{0}{y^3}.$$

Prius productum erit Numerator, & poſterius diviſum per x Denominator Fractionis, quæ exprimet longitudinem BD, ad cujus extremitatem D ducenda eſt Tangens CD: eſt ergo longitudo BC $= \frac{-2xxy+2byy-3y^3}{3xx-4xy+2bx-bb}$.

Hoc eſt unum particulare, vel corollarium potius Methodi generalis, quæ extendit ſe, citra moleſtum ullum calculum, non modo ad ducendum Tangentes ad quaſvis Curvas, ſive Geometricas, ſive Mechanicas, vel quomodocunq; rectas lineas aliaſve Curvas reſpicientes; verum etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, centris Gravitatis Curvarum, &c. Neq; (quemadmodum *Huddenii* methodus de *Maximis* & *Minimis*) ad ſolas reſtringitur æquationes illas, quæ quantitatibus ſurdis ſunt immunes.

Hanc methodum intertexui alteri iſti, qua Æquationum Exegeſin inſtituo, reducendo eas ad Series infinitas. Memini me ex occaſione aliquando narraſſe D. *Barrovio*, edendis Lectionibus ſuis occupato, inſtructum me eſſe hujuſmodi methodo Tangentes ducendi: Sed neſcio quo diverticulo ab ea ipſi deſcribenda fuerim avocatus.

Sluſii Methodum Tangentes ducendi brevi publice prodituram confido: quamprimum advenerit exemplar ejus ad me tranſmittere ne grave ducas.

Epiſtola D. Sluſii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 167$\frac{2}{3}$, 17 *Januarii* Leodii *data, qua continetur methodus ejus ducendi Tangentes, inter Epiſtolas Regiæ Societatis aſſervatur Lib. N°. 6. pag.* 11. *Legitur autem impreſſa in Tranſactionibus Philoſophicis N°.* 90.

Ex

Ex Epiſtola D. Oldenburgh *ad D.* Sluſium, *Anno* $167\frac{2}{3}$, *29 Januarii data, qua prædictis* Sluſii *literis reſpondetur. Legitur autem exemplar ejus in libris Regiæ Societatis N°. 6. pag. 27.*

STatui, deo dante, prima occaſione Methodum ipſam, prout Epiſtola tua continetur, Tranſactionibus Philoſophicis inſerere. Non ingratum interea fuerit accipere quæ Doctiſſimus noſter *Newtonus*, in Academia *Cantabrigienſi* Mathematum Profeſſor, de eodem argumento ad D. *Collinium* noſtrum, qui te ſummopere & jugiter colit, nuper perſcripſit in hæc verba.

“ Non parum me juvat intelligere, Mathematicos exteros in eandem
“ mecum incidiſſe ducendi Tangentes methodum. Qualem eam eſſe con-
“ jiciam ex hoc exemplo percipies. *Atq; ita deinceps ut in præcedente ip-*
“ *ſius* Newtoni *Epiſtola habetur.*

Hactenus *Newtonus*, quæ ideo nunc perſcribo ut cum noviſſimis tuis comparare poſſis.

Epiſtola D. Sluſii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 1673, 3 *Maii* Leodii *data, qua continentur fundamenta Methodi Tangentium* Sluſianæ, *cujuſque aſſervatur exemplar in libris Epiſtolarum Reg. Societatis N°. 6. pag.* 111. *impreſſa legitur in Phil. Tranſact. N°.* 95.

Ex Epiſtola D. Oldenburgh *ad D.* Sluſium, *Anno* 1673, 10 *Julii data. Legitur autem inter Epiſtolas Regiæ Societatis, Lib. 6. pag.* 196.

EN tibi, Vir illuſtriſſime, impreſſum modum tuum demonſtrandi methodum tuam ducendi Tangentes ad quaslibet Curvas, quemadmodum poſtremis tuis literis eum mihi communicaveras: Subticui viri nomen

men offenſionis evitandi cauſa. Scripſit mihi D. *Newtonus* in hanc ſententiam.

“ Ex priori tua Epiſtola ſubdubitabam, exiſtimaretne celeberrimus
“ *Sluſius* per ea, quæ ipſi de me ſcripſeras, me mihi tribuere methodum
“ ipſius ducendi Tangentes; donec intelligerem a D. *Collinio*, te ipſi
“ ſignificaſſe, eam, ex opinione tua, ſerius hic inventam fuiſſe. Tibi
“ quippe videtur, eam D. *Sluſio* perſpectam fuiſſe aliquot annis priuſ-
“ quam ederet Meſolabum ſuum, proindeq; antequam ego eam intel-
“ ligerem. At ſi res ſecus ſe haberet, cum tamen eam primus com-
“ municaverit amicis ſuis & literato orbi, jure merito ipſi debetur.
“ Quoad methodos illas, eædem ſunt, quanquam, crediderim, ex prin-
“ cipiis diverſis derivatæ. Neſcio tamen num ipſius principia eam lar-
“ giantur adeo generalem ac mea; quæ ad æquationes terminis ſurdis
“ affectas ſe extendunt, abſq; eorum ad aliam formam reductione.

Hæc ille, quæ in bonam partem a te acceptum iri confido.

Excerpta ex Epiſtola D. Gothofredi Guilielmi Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *Londini, Anno* 167¾, 3 *Feb. data. Hujus Autographon in ſcriniis Regiæ Societatis extat, & exemplar ejus in lib. Epiſt. dictæ Societatis N°. 6. pag.* 53 *deſcriptum legitur.*

CUM heri apud illuſtriſſimum *Boylium* incidiſſem in clariſſimum *Pallium* Mathematicum inſignem, ac de Numeris incidiſſet mentio, commemoravi ego, ductus occaſione Sermonum, eſſe mihi methodum ex quodam differentiarum genere, quas voco generatrices, colligendi terminos Seriei cujuſcunq; continue creſcentis vel decreſcentis. Differentias autem generatrices voco, ſi datæ Seriei inveniantur differentiæ, & differentiæ differentiarum, & ipſarum ex differentiis differentiarum differentiæ &c. & ſeries conſtituatur ex termino primo & prima differentia, & prima differentia differentiarum, & prima differentia ex differentiis differentiarum &c. ea Series erit differentiarum generatricium, ut ſi Series continue creſcens vel decreſcens fuerit *a*, *b*, *c*, *d*.

Poſita $\backsim$ *differentiæ Nota*,] differentiæ generatrices erunt.

1 a. 2 $a \backsim b$. 3 $\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}$. 4 $\overline{\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}} \backsim \overline{\overline{b \backsim c} \backsim \overline{c \backsim d}}$

4 $\overline{a \backsim b \backsim b \backsim c} \backsim \overline{b \backsim c \backsim c \backsim d}$

3 $a \backsim b \backsim b \backsim c \quad\quad b \backsim c \backsim c \backsim d.$

2 $a \backsim b \quad\quad b \backsim c \quad\quad c \backsim d$

1 $a \quad\quad b \quad\quad c \quad\quad d$

Aut in Numeris ; ſi Series ſit Numerorum cubicorum deinceps ab unitate creſcentium, differentiæ generatrices erunt numeri o, 1, 6, 6. Voco autem generatrices, quia ex iis certo modo multiplicatis producuntur termini Seriei ; cujus uſus tum maxime apparet, cum differentiæ generatrices ſunt finitæ ; termini autem Seriei infiniti ; ut in propoſito exemplo Numerorum Cubicorum.

				o		o		o				
			6		6		6		6			
		6		12		18		24		30		
	1		7		19		37		61		91	
o		1		8		27		64		125		216

Hoc cum audiſſet clariſſimus *Pellius* reſpondit, id jam fuiſſe in literas relatum a D. *Mouton* Canonico *Lugdunenſi*, ex obſervatione nobiliſſimi viri *Franciſci Regnaldi Lugdunenſi*, dudum in literario Orbe celebri, in libro laudati D. *Mouton* de diametris apparentibus Solis & Lunæ. Ego qui ex Epiſtola quadam a *Regnaldo* ad *Monconiſium* ſcripta, & Diario itinerum *Monconiſiano* inſerta, nomen D. *Moutoni* & deſignata ejus duo didiceram ; Diametros Luminarium apparentes, & conſilium de menſuris rerum ad poſteros tranſmittendis ; ignorabam tamen librum ipſum prodiiſſe : quare apud D. *Oldenburgium Societatis Regalis* Secretarium, ſumtum mutuo tumultuarie percurri, & inveni veriſſime dixiſſe *Pellium.* Sed & mihi tamen dandam operam credidi, ne qua in animis relinqueretur ſuſpicio, quaſi tacito inventoris nomine alienis meditationibus honorem mihi quærere voluiſſem ; & ſpero apparituram eſſe, non adeo egenum me meditationum propriarum ut cogar alienas emendicare. Duobus autem

K argumen-

argumentis ingenuitatem meam vindicabo. Primo ſi ipſas Schedas meas confuſas, in quibus non tantum inventio mea ſed & inveniendi modus occaſioq; apparet, monſtrem: deinde ſi quædam momenti maximi *Regnaldo Moutonoq;* indicta addam, quæ ab heſterno veſpere confixiſſe me non ſit veriſimile, quæq; non poſſunt facile expectari a Tranſcriptore.

Ex Schedis meis occaſio inventi hæc apparet: quærebam modum inveniendi differentias omnis generis poteſtatum, quemadmodum conſtat differentias Quadratorum eſſe numeros impares; inveneramque regulam generalem ejuſmodi.

Data potentia gradus dati præcedente, invenire ſequentem (vel contra) diſtantiæ datæ vel radicum datarum; ſeu invenire potentiarum gradus dati utcunq; diſtantium differentias. Multiplicetur potentia gradus. proxime præcedentis radicis majoris per differentiam radicum; & differentia potentiarum gradus proxime præcedentis multiplicetur per radicem minorem: productorum ſumma erit quæſita differentia potentiarum, quarum radices ſunt datæ. Eandem regulam ita inflexeram, ut ſufficiret, præter radices, cujuslibet gradus, etiamſi non proxime præcedentis, potentias datarum radicum dari, ad differentias potentiarum alterius cujuſcunq; licet altioris gradus inveniendas. Et oſtendi quod in Quadratis obſervatur, numeros impares eſſe eorum differentias, id non niſi regulæ propoſitæ ſubſumptionem eſſe.

His meditationibus defixus, quemadmodum in Quadratis differentiæ ſunt numeri impares, ita quoq; quæſivi quales eſſent differentiæ Cuborum; quæ cum irregulares viderentur, quæſivi differentias differentiarum, donec inveni differentias tertias eſſe numeros ſenarios. Hæc obſervatio mihi aliam peperit: videbam enim ex differentiis præcedentibus generari terminos differentiaſq; ſequentes, ac proinde ex primis, quas ideo voco generatrices, ut hoc loco o . 1 . *6* . *6*, ſequentes omnes. Hoc concluſo reſtabat invenire, quo additionis, multiplicationiſve, aut horum complicationis genere, termini ſequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atq; ita reſolvendo experiundoq; deprehendi primum Terminum o componi ex prima differentia generatrice o ſumta ſemel ſeu vice una: Secundum 1 ex prima o ſemel & ſecunda 1 ſemel: Tertium 8 ex prima o ſemel, ſecunda 1 bis & tertia *6* ſemel; nam $o \times 1 + 1 \times 2 + 6 \times 1 = 8$ Quartum 27, ex prima o ſemel, ſecunda 1 ter, tertia *6* ter, quarta *6* ſemel: nam $o \times 1 + 1 \times 3 + 6 \times 3 + 6 \times 1 = 27$, *&c.* idq; Analyſis mihi univerſale eſſe comprobavit. Hæc fuit occaſio obſervationionis meæ longe alia a *Moutoniana*, qui cum in Tabulis condendis laboraret, in hoc calculandi compendium cum *Regnaldo* incidit: nec vel illi vel *Regnaldo* adimenda laus; quod & *Briggius* in Logarithmicis ſuis jam olim talia quædam, obſervante *Pellio*, ex parte advertit. Mihi hoc ſupereſt ut addam nonnulla illis indicta, ad amoliendum Tranſcriptoris nomen; neq; enim intereſt Reipublicæ quis obſervaverit, intereſt quid obſervetur. Primum ergo illud adjicio, quod apud *Montonium* non extat, & caput tamen rei

Digitized by Google

rei eſt : quinam ſint illi numeri, quorum Tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter ſe junctis, termini Serierum generentur. Vides enim ex ipſo modo quo tabula ab eo *pag.* 385. exhibetur, non fuiſſe id ei ſatis exploratum ; alioqui enim veriſimile eſt ita Tabulam fuiſſe diſpoſiturum, ut ea numerorum connexio atq; harmonia appareret ; niſi quis de induſtria texiſſe dicat : ita enim ſe habet pars Tabulæ.

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
(4)	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Apparet ex hujus Tabulæ conſtructione ſolam haberi rationem correſponſus numerorum generantium cum numero Termini generati ; ut cum terminus eſt quartus (4) producitur ex prima differentia ſemel, ſecunda ter 3, tertia ter 3, quarta ſemel 1 ; ideo in eadem (4) Linea tranſverſa locantur 1. 3. 3. 1. Sed vel non obſervavit vel diſſimulavit autor correſponſum numerorum, ſi a ſummo deorſum eundo per columnas diſponantur hoc modo,

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Ita enim ſtatim vera genuinaq; eorum natura ac generatio apparet ; eſſe ſcilicet eos numeros quos Combinatorios appellare ſoleo, de quibus multa

Digitized by Google

multa dixi in diſſertatiuncula de Arte Combinatoria; quoſq; alii appellant Ordines numericos; alii in ſpecie primam columnam Unitatum; ſecundam Numerorum naturalium, tertiam Triangularium, quartam Pyramidalium, quintam Triangulo-Triangularium *&c.* de quibus integer extat Tractatus *Paſchalii* ſub titulo Trianguli Arithmetici; in quo tamen proprietatem numerorum ejuſmodi tam illuſtrem tamq; naturalem * non obſervatam ſum miratus. Sed eſt profecto caſus quidam in inveniendo, qui non ſemper maximis ingeniis maxima, ſed ſæpe etiam mediocribus nonnulla offert.

Hinc jam vera numerorum iſtorum natura, & Tabulæ conſtructio, ſive a *Regnaldo* ſive a *Moutonio* diſſimulata, intelligitur: ſemper enim terminus datus columnæ datæ componitur ex termino præcedente columnæ tam præcedentis quam datæ: Atq; illud quoq; apparet, non opus eſſe moleſto calculo ad Tabulam a *Moutonio* propoſitam continuandam, ut ipſe poſtulat; cum hæ numerorum Series paſſim jam tradantur calculanturque.

Cæterum *Moutonius* obſervatione iſta ad interponendas medias proportionales inter duos extremos numeros datos; ego ad inveniendos ipſos numeros extremos in infinitum cum eorum differentiis, utendum cenſebam. Hinc ille non niſi cum differentiæ ultimæ evaneſcunt (aut pene evaneſcunt) uſum regulæ invenit; ego detexi innumerabiles caſus, regula quadam inobſervata comprehendendos; ubi poſſum ex datis numeris finitis certo modo multiplicatis producere numeros plurimarum Serierum in infinitum euntium, etſi differentiæ earum non evaneſcant.

Ex iiſdem fundamentis poſſum efficere in progreſſionibus problemata plurima; aut in Numeris ſingularibus, aut in Rationibus vel Fractionibus: poſſum enim progreſſiones addere ſubtrahereq; imo multiplicare quoq; & dividere, idq; compendioſe.

$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{56}$
$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{126}$
&c.	*&c.*	*&c.*	*&c.*

Multa alia circa hos numeros obſervata ſunt a me, ex quibus illud eminet, quod modum habeo ſummam inveniendi Seriei Fractionum in infinitum decreſcentium; quarum numerator Unitas, nominatores vero numeri iſti Triangulares aut Pyramidales, aut Triangulo Triangulares *&c.*

* Vi-

Digitized by Google

* *Vide* Paſchalii *Triangulum Arithmeticum*, Pariſiis *Anno* 1665 *editum*, *pag.* 2. *ubi definitionum antepenultima hæc eſt.*

Le nombre de chaque cellule eſt egal a celuy de la cellule qui la precede dans ſon rang perpendiculaire, plus a celuy de la cellule qui la precede dans ſon rang parallele. Ainſi la cellule F, c'eſt a dire le nombre de la cellule F, egale la cellule C *plus la cellule* E; *& ainſi des autres.*

In ſcriniis etiam Reg. Societatis aſſervantur Autographa quinque Epiſtolarum, a D. Leibnitio *ad D.* Oldenburgum *eodem Anno* 1673 *ſcriptarum*; *prima autem* Londini *data eſt* Februarii 20, *reliquæ vero* Pariſiis Martii 30, Aprilis 26, Maii 24, *et* Junii 8. *Omniumque, ſi ſecundam excipias, exemplaria leguntur in Libro Regiæ Societatis N°.* 6. *Pag.* 34, 101, 120 *et* 137.

Quinetiam duæ aliæ D. Leibnitii *ad* Oldenburgum *Epiſtolæ, altera Anno* 1674 Julii 15, *altera* Octob. 26 *ſequente*, Pariſiis *datæ*, *leguntur in Lib. Epiſt. Regiæ Societatis N°.* 7. *pag.* 93 *et* 110, *eædemque reperiuntur impreſſæ in Tomo tertio Operum Mathematicorum D.* J. Wallis.

Ex harum priore 15 Julii *data.*

ALIA mihi Theoremata ſunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile eſt, cujus ope Area Circuli, vel Sectoris ejus dati, exacte exprimi poteſt per Seriem quandam Numerorum rationalium continue productam in infinitum. Sed & Methodos quaſdam Analyticas habeo generales admodum & late fuſas, quas majoris facio quam Theoremata particularia & exquiſita.

Ex poſteriore 26 Octob. *data.*

PORRO, in ea Geometriæ parte rem memorabilem mihi eveniſſe nuncio. Scis D. Vicecomitem *Brounkerum*, & Cl. *Nic. Mercatorem* exhibuiſſe Infinitam Seriem numerorum rationalium, ſpatio Hyperbolæ

 æqualem.

æqualem. Sed hoc in Circulo efficere hactenus potuit * nemo. Etſi enim illi *Brounkerus* & *Walliſius* dederint numeros rationales magis magiſque appropinquantes; nemo tamen dedit [*imo uterque dedit; ſed forte non ejus ſenſu,*] Progreſſionem Numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ ſumma ſit exacte æqualis Circulo. Sed vero mihi tandem feliciter ſucceſſit. Inveni enim ſeriem Numerorum valde ſimplicem, cujus ſumma exacte æquatur Circumferentiæ Circuli; poſito Diametrum eſſe Unitatem. Et habet ea Series id quoque peculiare, quod miras quaſdam Circuli & Hyperbolæ exhibet harmonias. Itaque Tetragoniſmi Circularis Problema, jam a Geometria traductum eſt ad Arithmeticam Infinitorum. Quod hactenus fruſtra quærebatur. Reſtat ergo tantum, ut Doctrina de Serierum ſeu Progreſſionum numericarum ſummis perficiatur. Quicunque hactenus Quadraturam Circuli exactam quæſivere; ne viam quidem aperuere per quam eo pervenire poſſe ſpes ſit. *Quod nunc primum a me factum dicere auſim.* Ratio Diametri ad Circumferentiam exacte a me exhiberi poteſt per Rationem, non quidem Numeri ad Numerum, (id enim foret abſolute inveniſſe;) ſed per rationem Numeri ad totam quandam Seriem numerorum rationalium valde ſimplicem & regularem. Eadem ** Methodo etiam Arcus cujuſlibet, cujus Sinus datur, Geometrice exhiberi per ejuſmodi ſeriem, valor poteſt, nullo ad integræ Circumferentiæ dimenſionem recurſu. Ut adeo neceſſe non ſit, Arcus rationem ad Circumferentiam noſſe.

* *Collinius* jam ante quadrennium Series *Newtonianas*, ante triennium *Gregorianas*, cum Amicis communicare cœpit. *Leibnitius* in *Anglia* diverſabatur Anno ſuperiore (1673) & hujuſmodi Series nondum communicaverat, nec prius cum Amicis communicare cœpit quam ab *Oldenburgo* acceperat, ut mox patebit; neque alias communicavit quam quas acceperat.

** Methodum exhibendi Arcum cujus Sinus datur *Leibnitius* ab *Oldenburgo* poſtea quæſivit *Maii* 12 1676.

Excerpta ex Epiſtola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1674, 8 Decembris *data, cujus aſſervatur Autographum. Eadem autem legitur inter Epiſtolas Regiæ Societatis, Lib. N°. 7. pag.* 119; *eſtque reſponſum ad literas D.* Leibnitii 26 Octobris *præcedentis datas.*

QUOD de profectu in Curvilinearum dimenſione memoras bene ſe habet: ſed ignorare te nolim Curvarum dimetiendarum rationem & Methodum a laudato *Gregorio*, nec non ab *Iſaaco Newtono* ad Curvas quaſlibet

Digitized by Google

quaſlibet tum Mechanicas, tum Geometricas, quin & Circulum ipſum ſe extendere, ita ſcilicet ut ſi in aliqua Curva Ordinatam dederis, *ejus* Methodi beneficio poſſis Lineæ Curvæ longitudinem, Area[m] *figuræ*, ejuſdem centrum Gravitatis, Solidum rotundum ejuſq; ſu[perf]iciem ſive erectam ſive inclinatam, ſolidiq; rotundi ſegmenta [secu]nda; horumq; omnium converſa invenire: quin & dato quolibe[t a]rcu in Quadrante, Logarithmicum Sinum, Tangentem vel Secante[m], non cognito naturali, & converſum computare. Quod vero ais n[e]m[in]em hactenus dediſſe progreſſionem numerorum rationalium, cuj[us i]n infinitum continuatæ ſumma ſit æqualis circulo, id vero tibi [pri]mum feliciter ſucceſſiſſe, de eo quidem tibi gratulor, &c.

Ex Epiſtola D. [Leib]nitii *ad D.* Oldenburg, Pariſiis *Anno* 1675, 30 Martii *da*[ta]. *Extat Autographum ſcriptoris; et reperitur deſcripta inte*[r E]*piſtolas Reg. Soc. N°. 7. pag.* 213. *Hac autem reſpondetu*[r] *ſupradictas* Oldenburgi *literas* 8 Decembris *præcedentis* [d]*atas.*

SCri[bis] clariſſimum *Newtonum* veſtrum habere methodum exhibendi [Qu]adraturas omnes, omniumq; curvarum ſuperficierum & ſolidorum ex [re]volutione genitorum dimenſiones, & centrorum gravitatis inventio[nes], per appropinquationes ſcilicet, ita enim interpretor. Quæ metho[d]us ſi eſt univerſalis & commoda, meretur æſtimari; nec dubito fore ingenioſiſſimo Authore dignam. Addis [t]ale quid *Gregorio* innotuiſſe.

Ex Epiſtola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitiu[m], *Anno* 1675, 15 Aprilis *data, cujus habetur exemplar inter Epiſto*[las] *Reg. Societatis N°. 7. pag.* 216. *Hac reſpondetur ad D.* Leibn[itii] *literas* 30 Martii *præcedentis datas: Anglice autem extat manu* [C]ollins *deſignata ac* 10 Aprilis *data, eamque Latine tranſtulit D.* Oldenburg *& ad D.* Leibnitium *miſit.*

D. *Collinius*, præmiſſa ſalute, quæ ſequuntur remittit. Primo Cl. *Gregorium* in poſtrema ſua ad Illuſtrem *Hugenium* reſponſione Seriem ſuppeditaſſe ad ſemicircumferentiam circuli inveniendam quæ talis.

Pone

Pone radium $= r$, dimidium latus quadrati inſcripti circulo $= d$, & differentiam inter radium & latus quadrati $= e$: ſemicircumferentia æqualis eſt $2d - \frac{4rr}{3 - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{23e^4}{113400d^3} - \frac{260e^5}{7484400d^4} - \&c.}$ in infinitum; quæ Series adeo p. uci poteſt ut a ſemicircumferentia minus differat quam ulla quantitas a. rabilis.

Editum hoc fuit a D. gorio poſtquam D. *Mercatoris* Logarithmotechnia jam extabat, quæ qua primum viderat lucem, ad D. *Barrovium* a me fuit tranſmiſſa; qui obſerva in ea infinitæ ſeriei uſu ad Logarithmos conſtruendos, reſcribebat Metl. m illam jam aliquandiu excogitatam fuiſſe a ſucceſſore ſuo *Newto*. omnibuſq; Curvis, earumque portionibus, Geometricis æque ac Mecha. s univerſim applicatam, cujus rei ſpecimina quædam ſubjecit, viz.

Poſita pro Radio Unitate, datoq; x pro Si. ad inveniendum z Arcum Series hæc eſt;

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \text{ \&c. in i. itum.}$$

Et extracta radice hujus Æquationis methodo ſymbolica, ſi dea. z pro arcu, ad inveniendum x ſinum ſeries hæc eſt;

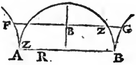
$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 + \text{\&c.}$$

Atque h. Series facile continuatur in infinitum. Prioris beneficio ex Sinu 30 grad. *ule-nii* numeri facile ſtruuntur.

Conſimiliter ſi ponas radium R, & B Sinum arcus : Zona inter diametrum & Chordam illi parallelam eſt

$$= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \text{\&c.}$$

Atque eadem ſeries mutatis ſignis ter. ni ſecundi, quarti & ſexti, &c. inſervi aſſignandæ Areæ Zonæ æquilateris Hy. olæ, viz.



$$\text{AFGB} = 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \text{\&c.}$$

Rurſum, dato Radio R, & Sinu verſo ſive ſagitta a, ad inveniendam Aream ſegmenti reſecti a Chorda : pone b^2 pro $2Ra$, & erit ſegmentum $= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^3}{5b} - \frac{a^5}{14b^3} - \frac{a^7}{36b^5} - \frac{5a^9}{352b^7} - \frac{7a^{11}}{832b^9} - \text{\&c.}$

Et Arcus integer $= 2b + \frac{a^2}{3b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \frac{63a^{10}}{1408b^9} + \text{\&c.}$

Dux

Duæ hæ Series D. *Gregorio* debentur, quas exhibuit ex eo tempore quo uſus eſt hac Methodo ; quod ab ipſo aliquot poſt annis factum, poſtquam ſcilicet intellexerat D. *Newtonum* generatim eam applicaſſe. Exinde quoque ad nos miſit Series ſimiles ad Tangentes naturales ex earundem Arcubus, & converſim, obtinendum. Ex. gr. pone Radium $= r$, Arcum a, Tangentem t ; erit $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \&c.$ Et converſim ex Tangente invenire Arcum ejus

$$* \; a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \&c.$$

Atque hoc factum cum vides, facile credideris, poſſe eadem Methodo æque facile ex Arcu inveniri Sinum vel Tangentem Logarithmicum abſq; inventione Naturalis, & converſim. Pronum quoque tibi fuerit credere Methodum hanc applicari poſſe ad rectificationem quarumlibet curvarum, particulatim vero ad lineam Quadratricem, & ad inveniendam Aream illius Figuræ : id quod antehac nulla demum cum Methodo fuit præſtitum. Atque ulteriore calculationis labore extendi poteſt ad inveniendas Areas Superficierum in rotundis Solidis inclinantibus, nec non ad inveniendas Soliditates ſecundorum ſegmentorum in Solidis rotundis. *E. G.* Si Conoides aliqua ſecetur a plano tranſeunte per Baſin ejus, poterit id vocari Segmentum primum ; & ſi hæc portio iterum ſecetur a plano recto ad planum prius ſecans, portio eum in modum ſecta hoc ipſo intenditur ut ſit Segmentum [ſecundum.]

Porro Methodus eadem applicatur inveniendis radicibus purarum poteſtatum, valdeque affectarum æquationum ; ita ut ex quolibet numero abſque Logarithmorum ope, excitare poſſis quamlibet poteſtatem per ſaltum, & ex quavis poteſtate, utut affecta, invenire Radicem ejus, vel quodvis medium illud inter & Unitatem aſſignatum. D. *Gregorius* magno labore paravit Seriem infinitam, generatim reſpectivis poteſtatibus affectis cujuſlibet æquationis propoſitæ adaptandam ; ita ut quivis Algebræ cultor, penu ipſius inſtructus, mox aptare poſſit Seriem aliquam ad inveniendam quamlibet Radicem cujuſvis æquationis propoſitæ, poſtquam innotuit ad quod latus noti limitis Radix ceciderit. Verum id hactenus nobis non communicavit, uti nec nos illum ad id faciendum ſolicitavimus, imprimis cum ipſe lubens permittat *Newtono*, ut ille primus novæ hujus Methodi de infinita Serie inventionem orbi Mathematico patefaciat, &c.

* Hanc Seriem D. *Collins* initio anni 1671 a *Gregorio* acceperat ut ſupra ; D. *Leibnitius* eandem cum amicis in *Gallia* hoc anno ut ſuam communicavit, celata hac Epiſtola.

Ex Epiſtola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 1675, 20 Maii Pariſiis *data. Extat Autographon ejus, eademque legitur in Lib. Epiſt. Regiæ Societatis N°. 7. pag.* 235. *Reſponſum autem eſt ad prædictas D.* Oldenburgi *literas* 15 Aprilis *datas.*

LIteras tuas multa fruge Algebraica refertas accepi, pro quibus tibi & doctiſſimo *Collinio* gratias ago. Cum nunc præter ordinarias curas Mechanicis imprimis negotiis diſtrahar, non potui examinare Series quas miſiſtis, ac cum * meis comparare. Ubi fecero † perſcribam tibi Sententiam meam: nam aliquot jam anni ſunt quod inveni meas via quadam ſic ſatis ſingulari. *Collinium* ipſum magni facio, quoniam omnes puræ Matheſeos partes ab ipſo egregie cultas video. Multa habeo deſtinata a quibus me deterrent calculi tantum, qui nec ſuſcipi facile ab homine occupato, nec alteri niſi doctiſſimo ac ſinceriſſimo tuto credi poſſunt.

* His verbis patet Series, quas D. *Leibnitius* ſe ante annos aliquot inveniſſe profeſſus eſt, a communicatis diverſas fuiſſe. Subjungit etiam ipſe verbis diſertis *ſua a Communicatis longe diverſa eſſe circa hanc rem meditata.* Vide Epiſt. *Maii* 12, 1676.

† *N. B.* Hoc nunquam fecit D. *Leibnitius*, ſed ubi Series duas primas per *Mohrum* quendam denuo accepiſſet, poſtulavit Methodum D. *Newtoni* perveniendi ad iſtas duas Series ad ſe mitti, quaſi nullas prius ab *Oldenburgo* accepiſſet. Et hoc pacto Epiſtolam *Oldenburgi* oblivioni tradendo, licentiam obtinuit Serierum ob eo acceptarum ultimam ſibi vindicandi.

Ex Actis Eruditorum Anno 1691 *Menſe* Aprili *pag.* 178. *habentur hæc D.* Leibnitii *verba.*

JAM Anno 1675 *compoſitum habebam * opuſculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum, ſed quod, materia ſub manibus creſcente, limare ad editionem non vacavit, poſtquam aliæ occupationes ſupervenere; præſertim cum nunc prolixius exponere vulgari more, quæ Analyſis noſtra nova paucis exhibet, non ſatis operæ pretium videatur. Interim inſignes quidam Mathematici, quibus veritas primariæ noſtræ Propoſitionis dudum in Actis publicatæ innotuit, pro humanitate ſua noſtri qualiſcunque inventi candide meminere.*

* Quadratura Arithmetica, de qua hic agitur, ea eſt quam *Gregorius* cum D. *Collinio* initio Anni 1671, *Oldenburgus* cum D. *Leibnitio* hoc Anno communicavit. De hac

Quadratura

Quadratura D. *Leibnitius* opuſculum vulgari more compoſuit & cum amicis hoc anno communicare cœpit: Anno proximo ſcriptum polivit ut cum *Oldenburgo* communicaretur: Anno tertio in patriam redux Negotiis publicis intereſſe cœpit, & materia ſub manibus creſcente opus ad Editionem limare non amplius vacavit. Sed neque opere pretium duxit ſubinde prolixius exponere vulgari more quæ Analyſis ſua nova paucis exhibet. Inventa eſt igitur hæc Analyſis poſtquam D. *Leibnitius* opuſculum vulgari more compoſitum polire & limare deſiit, & Negotiis publicis intereſſe cœpit.

Excerpta ex Schediaſmatis manu D. Collins *exaratis & in ſcriniis ejus repertis, & nonnullis in locis* Oldenburgi *calamo caſtigatis; quæ quidem D.* Oldenburg *D.* Tſchürnhauſio *tranſmittenda acceperat & Latine verterat. Extant autem tum Autographa D.* Collins, *tum reſponſum ad eadem D.* Oldenburgo *redditum, cum Titulo manu ejus inſcripto,* " Reſponſum ad Scriptum D. *Collinii* de *Carteſii* Inventis.

NOnnulli *Carteſium* arrogantiæ inſimularunt, aſſerentem ſe ex omnibus modis Methodiſve poſſibilibus, in optimam ſimpliciſſimamque incidiſſe: an ullibi hoc affirmaverit *Carteſius* plane neſcio, certum tamen eſt Methodum ducendi Tangentes multum promotam fuiſſe a *Newtono* & *Gregorio*. Ita liquet ex *Newtoni* Epiſtola Anno 1672, 10 *Decemb.* data. *Vide pag.* 29.

Ex Epiſtola, D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 24 Junii *data, & in Lib. Epiſt. Regiæ Societatis N°.* 7. *pag.* 243 *deſcripta. Reſponſum autem eſt ad præcedentes D.* Leibnitii *Literas* 20 Maii *datas.*

DOminus *Newtonus*, beneficio Logarithmorum graduatorum in ſcalis παραλλήλως locandis ad diſtantias æquales, vel circulorum concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit radices Æquationum. Tres regulæ rem conficiunt pro Cubicis, quatuor pro Biquadraticis. In harum diſpoſitione reſpectivæ Coefficientes omnes jacent in eadem Linea recta; a cujus puncto tam remoto a prima Regula ac ſcalæ graduatæ ſunt ab invicem, Linea recta iis ſuperextenditur, una cum præſcriptis conformibus genio æquationis, qua in regularum una datur poteſtas pura radicis quæſitæ.

Ex

Ex Epiſtola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Pariſiis *Anno* 1675, 12 Julii *data. Hujus extat Autographum ; habeturque Exemplar ejus in Lib. Epiſt. Reg. Societatis N°* 7. *pag.* 149. *Reſponſum autem eſt ad Literas præcedentes D.* Oldenburgi, *& impreſſa legitur inter opera D.* Wallifii. *In hac perperam ſcribitur* Parius *pro* Darius.

METhodum Celeberrimi *Newtoni*, radices Æquationum inveniendi per inſtrumentum, credo differre a mea. Neque enim video, in mea, quod aut Logarithmi aut Circuli concentrici conferant. Quoniam tamen rem Vobis non ingratam video, conabor abſolvere, ac tibi communicare, quamprimum otii ſat erit.

Scripſiſti aliquoties, Veſtrates omnium Curvarum dimenſiones per appropinquationem dare. Velim noſſe, an poſſint dare Geometrice Dimenſionem Curvæ Ellipſeos vel Hyperbolæ ex data Circuli aut Hyperbolæ quadratura.

Ex Epiſtola D. Oldenburgi *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 30 Septemb. *data. Cujus extat Exemplar manu D.* Oldenburg *deſcriptum. Legitur etiam in Lib. Regiæ Societatis N°.* 7. *pag.* 159. *& Reſponſum eſt ad præcedentem.*

SCriptum quoddam Belgicum Belga quidem *Georgius Mohr* vocatus, Algebræ & Mechanicæ probe peritus, apud *Collinium* noſtrum reliquit, qui apographum ejus, quale hic inſertum vides, impertire tibi voluit ——— *Tſchürnhauſius* nuper *Pariſios* hinc profectus eſt, & te ſine dubio jam ſalutavit. ——— Scire cupis an dare noſtrates Geometrice poſſint dimenſionem Curvæ Ellipſeos aut Hyperbolæ, ex data Circuli aut Hyperbolæ quadratura. Ait *Collinius* illos id præſtare non poſſe Geometrica præciſione, ſed dare eos poſſe ejuſmodi approximationes quæ quacunque quantitate data minus a ſcopo aberrabunt. Et ſpeciatim quod attinet alicujus arcus circuli rectificationem, impertiri tibi poterit laudatus *Tſchürnhauſius* Methodum a *Gregorio* noſtro inventam, quam cum apud nos eſſet, *Collinius* ipſi communicavit.

Ex Epiſtola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Pariſiis 28 Decembris *Anno* 1675 *data. Extat Autographum ejus, deſcribiturq; in Lib. Reg. Societatis N°. 7. pag.* 189. *& a D.* Wallſio *impreſſa eſt.*

QUOD *Tſchürnhauſium* ad nos miſiſti, feciſti pro amico: multum enim ejus conſuetudine delector, & ingenium agnoſco in Juvene præclarum & magna promittens. Inventa mihi oſtendit non pauca, Analytica & Geometrica, ſane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo expectari poſſit.

Habebis & a me Inſtrumentum Æquationes omnes Geometricas conſtruendi unicum; Et meam Quadraturam Circuli ejuſque partium, per Seriem Numerorum Rationalium infinitam; de qua aliquoties ſcripſi, & quam jam pluſquam Biennio abhinc Geometris hic communicavi.

Ex Epiſtola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Pariſiis 12 Maii *Anno* 1676 *data, cujus Autographum in ſcriniis Regiæ Societatis aſſervatur, cum Notis manu* Oldenburgi *in tergo ſcriptis.*

CUM *Georgius Mohr* Danus [*ſuperius Belga*] in Geometria & Analyſi verſatiſſimus, nobis attulerit communicatam ſibi a Doctiſſimo *Collinio* veſtro expreſſionem relationis inter Arcum & Sinum per infinitas Series ſequentes: Poſito Sinu x, Arcu z, Radio 1.

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \ \&c.$$

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 \ \&c.$$

Hæc * INQUAM, cum nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingenioſa videntur, & poſterior imprimis Series elegantiam quandam ſingularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris, Vir Clariſſime, ſi demonſtrationem tranſmiſeris. Habebis viciſſim mea ab his longe diverſa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc Annis ad te perſcripſiſſe credo, demonſtratione tamen non addita quam † nunc polio. Oro ut Cl. *Collinio* multam a me ſalutem dicas: is facile tibi materiam ſuppeditabit ſatisfaciendi deſiderio meo.

* Quaſi ante Annum eaſdem non accepiſſet ab *Oldenburgo*.

† Opuſculum prædictum de Quadratura Arithmetica D. *Leibnitius* polire perrexit.

Digitized by Google

Ex Epiſtola D. Collins *ad D.* Oldenburgum, *D.* Leibnitio *tum* Pariſiis *agenti tranſmittenda. Hujus exemplar, Anno* 1676 14 Junii, *manu ipſius D.* Collins *deſcriptum, ac in ſcriniis ejus repertum etiamnum conſervatum eſt.*

REſpondeas, ſi placet, ad ea quæ quærit D. *Leibnitius* in Literis ejus 12 *Maii* datis, Seriei primæ numeros Coefficientes $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{5}{112}$, $\frac{35}{1152}$, hoc modo compoſitos eſſe, $\frac{1\times1}{2\times3}=\frac{1}{6}$, & $\frac{1}{6}\times\frac{3\times3}{4\times5}=\frac{3}{40}$, & $\frac{3}{40}\times\frac{5\times5}{6\times7}=\frac{5}{112}$, & $\frac{5}{112}\times\frac{7\times7}{8\times9}=\frac{35}{1152}$, & $\frac{35}{1152}\times\frac{9\times9}{10\times11}=\frac{63}{2816}$, atque ita deinceps in infinitum: unde intelligi poſſit hanc Seriem elegantia minime cedere converſæ ejuſdem, quæ tamen illi magis arridet. Meditata ejus de eodem Argumento, cum fundamentis plane diverſis innitantur, non poſſunt nobis non eſſe acceptiſſima; atque exoptamus ea fidem noſtram exuperare poſſe. Hujus autem Methodi ea eſt præſtantia, ut cum tam late pateat, ad nullam hæreat difficultatem. *Gregorium* autem alioſque in ea fuiſſe opinione arbitror, ut quicquid uſpiam antea de hac re innotuit, quaſi dubia diluculi lux fuit, ſi cum meridiana claritate conferatur.

HOC *Anno cum D.* Gregorius *emortuus eſſet, quæ cum Amicis communicaverat in unum corpus ſolicitante D.* Leibnitio *collecta ſunt. Et extat collectio manu D.* J. Collins *exarata, cum hoc Titulo*;

* *Excerpta ex D.* Gregorii *Epiſtolis cum D.* Leibnitio *communicanda, ſibique poſtquam perlegerit ille reddenda. Et ſic orditur.*

† *D.* H. Oldenburg *Armigero.*

QUandoquidem impenſe rogaſti me, permotus ſolicitationibus D. *Leibnitii* & aliorum ex *Academia Regia Pariſina*, ut Hiſtoriolam aliquam concinnarem, Studia & Inventa doctiſſimi D. *Jacobi Gregorii* nuper defuncti exhibentem; quoniamque arcta inter nos amicitia, crebraque dum viveret

Digitized by Google

viveret literarum reciprocatio fuit: In honorem Nominis ejus, quæcunq; majoris momenti in literis ejus occurrunt, ſumma fide in unum colligere ſtatuo, &c.

* *Extracts from Mr.* Gregory's *Letters, to be lent Monſieur* Leibnitz *to peruſe; who is deſired to return the ſame to you.*

† *To* H. Oldenburg, *Eſquire.*

S I R,

FOraſmuch as you have much preſſed me your ſelf, being incited thereto by the earneſt Deſires of Mr. *Leibnitz* and others of the Royal Academy at *Paris*, to give an Account of the great Pains and Attainments of the late learned Mr. *James Gregory*, deceas'd; there being a great Friendſhip, and frequent Correſpondence between us in his Life time; I ſhall for the Honour I bear to his Memory, impartially give you an Account of the moſt material Paſſages in his Letters.

In hac Collectione habetur Epiſtola ſuperius impreſſa, qua Gregorius *Quadraturam prædictam Arithmeticam initio Anni* 1671 *cum D.* Collins *communicavit: Habetur & Epiſtola D.* Newtoni *ad D.* Collins, 10 Decemb. 1672 *data, & ſuperius impreſſa, in qua* Newtonus *ſe Methodum generalem habere dicit ducendi Tangentes, quadrandi Curvilineas, & ſimilia peragendi; & Methodum Exemplo ducendi Tangentes exponit: quam Methodum D.* Leibnitius differentialem *poſtea vocavit.*

Ex Epiſtola D. Collins *ad D.* Davidem Gregorium *prædicti* Jacobi Gregorii *nuper defuncti fratrem. Data autem eſt Anno* 1676, 11 Auguſti, *ejuſq; habetur exemplar manu ipſius D.* Collins *deſcriptum.*

HIſtoriolam compoſui, qua in unum congeſſi quæcunq; unquam a Fratre tuo de rebus Mathematicis, vel literis aliaſve ſcripto, vel colloquio acceperim: eo fine ut eandem ſcriniis Regiæ Societatis (cujus erat ſodalis) commiſſam & aſſervatam, Amici ejus inſpicere poſſint, vel ſi libuerit ſoluto pretio tranſcriptam habere. Conſtat autem duodecim circiter ſchedis. Me vero nihil omiſiſſe quod alicujus momenti eſſe poterit, ſi nonnulla cum *Hugenio* aliiſve controverſa excipias, aras ſacras juraturus contingere auſim. Mathematicis *Gallis* quouſque profecerat, quæque reliquerat Frater tuus, ſcire aventibus, me operam dediſſe ut iis ſatisfacerem ex ſequentibus comperies. *Sub finem autem exemplaris hujus Epiſtolæ hæc ſubjunxerat D.* Collins.

Digitized by Google

Eruditi ex Academia Regia *Pariſienſi*, audita D. *Gregorii* morte, cupide ſciſcitabantur ea quæ moriens reliquerat; ſimulq; narrationem eorum quæ attinent doctrinam Serierum infinitarum apud nos repertam petebant: Sequentem ideo ad eos tranſmittendam curavi, ac deinde ad *Davidem Gregorium* Fratrem *Jacobi* ſuperſtitem.

Quod attinet Doctrinam Serierum infinitarum; *Mercator* in Logarithmotechnia ſua primum Specimen ejus orbi exhibuit, applicando eam ad Hyperbolæ Quadraturam tantum, & ad Logarithmorum Conſtructionem, abſque radicum extractione. Hanc ipſam ejus doctrinam a D. *Walliſio* in Tranſact. Philoſoph. illuſtratam habemus; eamque poſtea adauxit & promovit D. *Gregorius* in Exercitationibus ejus Geometricis eodem anno editis.

Paucos poſt menſes quam editi ſunt hi Libri, miſſi ſunt ad D. *Barrovium Cantabrigiæ:* ille autem reſponſum dedit, hanc infinitarum Serierum doctrinam jam ante biennium a D. *Iſaaco Newtono* inventam fuiſſe, & quibuſvis Figuris generaliter applicatam; ſimulque tranſmiſit D. *Newtoni* opus manuſcriptum, a D. *Collins* deinde cum D. Vicecomite *Brounker* Regiæ Societatis tum Præſidi communicatum. *Barrovio* autem cathedram Mathematicam abdicante, *Newtonus* ab eodem commendatus in ſucceſſorem ejus electus eſt, & de hac Doctrina publice prælegit; Lectioneſque ejus in Bibliotheca publica *Cantabrigienſi* aſſervantur.

Collins deinde, mediante D. *Barrovio*, D. *Newtono* familiaris factus literarum commercium cum eo habuit; & ab eo Epiſtolam obtinuit 10 *Decembris* Anno 1672 datam, qua docet modum ducendi Tangentes ad Curvas Geometricas, ope Æquationis qua relatio inter Ordinatim applicatas & Abſciſſas exprimitur. *Vide Epiſtolam hanc pag. 29, 30.*

Collins etiam in diverſis literis Anno 1669 ad D. *Gregorium* datis, eidem ſignificavit *Newtoni* in hac materia ſucceſſus. *Gregorius* autem contra, ſe quoque plures habere pro circulo Series; ſimulque petiit nonnullas e *Newtonianis*, quas cum propriis conferre voluit, ad ſe mitti. Miſit igitur aliquas D. *Collins*, quas *Gregorius* a ſuis prorſus diverſas, & faciliores calculoque aptiores inveniens, haud levi ſtudio in eandem ipſam *Newtoni* Methodum incidit, circa Annum exeuntem 1670: ſicut ipſe aperte in Epiſtola 19 *Decemb.* teſtatur. *Pag.* 23.

Cum D. Leibnitius *Methodum perveniendi ad Series Anno ſuperiori ſibi miſſas deſideraret, & ut* Gregoriana *omnia* Lutetiam Pariſiorum *mitterentur:* Oldenburgus *&* Collins Newtonum *enixe rogarunt ut ipſe Methodum ſuam deſcriberet cum D.* Leibnitio *communicandam.*

Epiſtola

Epiſtola prior D. Iſaaci Newton, *Matheſeos Profeſſoris in Celeberrima Academia* Cantabrigienſi ; *ad D.* Henricum Oldenburg, *Regalis Societatis* Londini *Secretarium* ; 13 Junii 1676, *cum Illuſtriſſimo Viro D.* Godfredo Guilielmo Leibnitio (*eo mediante*) *communicanda. Literis* Oldenburgi, (26 Junii) *ad* Leibnitium *miſſa.*

QUanquam D. *Leibnitii* modeſtia, in Excerptis quæ ex Epiſtola ejus ad me nuper miſiſti, Noſtratibus multum tribuat circa Speculationem quandam *Infinitarum Serierum*, de qua jam cœpit eſſe rumor: Nullus dubito tamen quin ille, non tantum, *quod aſſerit*, Methodum reducendi Quantitates quaſcunque in ejuſmodi Series, ſed & varia Compendia, forte noſtris ſimilia ſi non & meliora, adinvenerit.

Quoniam tamen ea ſcire pervelit quæ ab Anglis hac in re inventa ſunt ; & ipſe ante annos aliquot in hanc Speculationem inciderim : Ut votis ejus aliqua ſaltem ex parte ſatisfacerem, nonnulla eorum quæ mihi occurrerunt ad te tranſmiſi.

Fractiones in Infinitas Series reducuntur per Diviſionem ; & Quantitates Radicales per Extractionem Radicum ; perinde inſtituendo Operationes iſtas in Speciebus, ac inſtitui ſolent in Decimalibus Numeris. Hæc ſunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractiones Radicum multum abbreviantur per hoc * *Theorema.*

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$ ſignificat Quantitatem cujus Radix, vel etiam Dimenſio quævis, vel Radix Dimenſionis, inveſtiganda eſt. P, Primum Terminum quantitatis ejus ; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem Indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: ſive dimenſio illa Integra ſit, ſive (ut ita loquar) Fracta ; ſive Affirmativa, ſive Negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro aa, aaa, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{c.a^3+bbx}}$ ſcribo $aa\times\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$; &

* Reſolutionem Binomii in hujuſmodi Seriem Anno 1669 *Newtono* innotuiſſe patet; ex Analyſi ſupra impreſſa, pag. 19, lin. 19, 20.

pro $\frac{aab}{\sqrt{c:\overline{a^3+bbx}\times\overline{a^3+bbx}:}}$ ſcribo $aab\times\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$. In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regula: erit $P=a^3$, $Q=\frac{bbx}{a^3}$ $m=-2$, $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in Quoto, uſurpo A, B, C, D, &c. Nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$; B pro ſecundo $\frac{m}{n}AQ$; & ſic deinceps. Cæterum uſus Regulæ patebit Exemplis.

Exemplum 1. Eſt $\sqrt{cc+xx}$ (ſeu $\overline{cc+xx}|^{\frac{1}{2}}$) $=c+\frac{xx}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\frac{7x^{10}}{256c^9}-$ &c. Nam, in hoc caſu, eſt $P=cc$, $Q=\frac{xx}{cc}$, $m=1$, $n=2$, $A(=P^{\frac{m}{n}}=cc^{\frac{1}{2}})=c$. $B(=\frac{m}{n}AQ)=\frac{xx}{2c}$. $C(=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{x^4}{8c^3}$. Et ſic deinceps.

Exemplum 2. Eſt $\sqrt{5:\overline{c^5+c^4x-x^5}:}$ (id eſt, $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $=c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}-\frac{2c^8xx+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}+$ &c. Ut patebit ſubſtituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Poteſt etiam $-x^5$ ſubſtitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q. Et tunc evadet $\sqrt{5:\overline{c^5+c^4x-x^5}:}=-x+\frac{c^4x+c^5}{5x^4}+\frac{2c^8xx+4c^9x+c^{10}}{25x^9}+$ &c. Prior modus eligendus eſt ſi x valde parvum ſit; poſterior, ſi valde magnum.

Exempl. 3. Eſt $\frac{N}{\sqrt{c:\overline{y^3-a^2y}}}$ (hoc eſt, $N\times\overline{y^3-a^2y}|^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N\times\frac{1}{y}+\frac{aa}{3y^3}+\frac{2a^4}{9y^5}+\frac{14a^6}{81y^7}$ &c. Nam $P=y^3$. $Q=-\frac{aa}{yy}$. $m=-1$, $n=3$. $A(P^{\frac{m}{n}}=y^{3\times-\frac{1}{3}})=y^{-1}$, hoc eſt $\frac{1}{y}$. $B(=\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{y}\times-\frac{aa}{yy})=\frac{aa}{3y^3}$ &c.

Exemplum 4. Radix Cubica ex Quadrato quadrato ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) eſt $d^{\frac{4}{3}}+\frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}+$ &c. Nam $P=d$. $Q=\frac{e}{d}$. $m=4$. $n=3$. $A(=P^{\frac{m}{n}})=d^{\frac{4}{3}}$, &c.

Exem-

Exempl. 5. Eodem modo ſimplices etiam poteſtates eliciuntur. Ut, ſi quadrato-cubus ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{5}$ ſeu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) deſideretur: Erit juxta Regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = 5$. & $n = 1$. Adeoque A $(= P^{\frac{m}{n}}) = d^{5}$. B $(= \frac{m}{n}AQ) = 5d^{4}e$. & ſic $C = 10d^{3}ee$. $D = 10dde^{3}$. $E = 5de^{4}$. $F = e^{5}$. & G $(= \frac{m-5n}{6n}FQ) = 0$. Hoc eſt, $\overline{d+e}|^{5} = d^{5} + 5d^{4}e + 10d^{3}ee + 10dde^{3} + 5de^{4} + e^{5}$.

Exempl. 6. Quinetiam Diviſio, ſive ſimplex ſit, ſive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut ſi $\frac{1}{d+e}$ (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{-1}$ ſive $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in ſeriem ſimplicium terminorum reſolvendum ſit: Erit, juxta Regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = -1$. $n = 1$. & A $(= P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}) = d^{-1}$ ſeu $\frac{1}{d}$. B $(= \frac{m}{n}AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d}) = -\frac{e}{dd}$. Et ſic $C = \frac{ee}{d^{3}}$. $D = -\frac{e^{3}}{d^{4}}$ &c. Hoc eſt, $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^{3}} - \frac{e^{3}}{d^{4}}$ &c.

Exemp. 7. Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eſt, Unitas ter diviſa per $d+e$, vel ſemel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^{3}} - \frac{3e}{d^{4}} + \frac{6ee}{d^{5}} - \frac{10e^{3}}{d^{6}} +$ &c.

Exempl. 8. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eſt, N diviſum per Radicem cubicam ipſius $d+e$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^{3}}{81d^{\frac{10}{3}}} +$ &c.

Exempl. 9. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$, hoc eſt, N diviſum per radicem quadrato-cubicam ex Cubo ipſius $d+e$, ſive $\frac{N}{\sqrt{5:\overline{d^{3}+3dde+3dee+e^{3}}}}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^{3}}{125d^{\frac{18}{5}}} +$ &c.

Per eandem Regulam, Geneſes Poteſtatum, Diviſiones per Poteſtates aut per Quantitates Radicales, & Extractiones Radicum altiorum in Numeris, etiam commode inſtituuntur.

Extractiones Radicum Æquationum Affectarum in Speciebus imitantur earum Extractionem in Numeris. Sed Methodus *Vietæ & Oughtredi* noſtri huic negotio minus idonea eſt. Quapropter aliam excogitare adactus ſum, *cujus ſpecimina, ne repetantur, vide in Tractatu de Analyſi, &c. pag.* 9, 10, *&c.*

Dicam

Dicam tantum in genere, Quod radix cujuſvis Æquationis ſemel extracta, pro Regula reſolvendi conſimiles æquationes aſſervari poſſit; quodque ex pluribus ejuſmodi Regulis, Regulam Generaliorem plerumque efformare liceat; & quod Radices omnes, ſive ſimplices ſint ſive affectæ, modis infinitis extrahi poſſint; de quorum ſimplicioribus itaque ſemper conſulendum eſt.

Quomodo ex Æquationibus ſic ad Infinitas Series reductis, Areæ & Longitudines Curvarum, contenta & Superficies ſolidorum, vel quorumlibet Segmentorum figurarum quarumvis, eorumque Centra Gravitatis determinantur; & quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejuſmodi Æquationes Infinitarum Serierum reduci poſſint, indeque Problemata circa illas reſolvi perinde ac ſi Geometricæ eſſent; nimis longum foret deſcribere. Sufficiat Specimina quædam talium Problematum recenſuiſſe: Inque iis, brevitatis gratia, literas A, B, C, D, &c. pro terminis Seriei, ſicut ſub initio, nonnunquam uſurpabo.

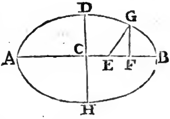
1. Si ex dato Sinu Recto, vel Sinu Verſo, Arcus deſideretur: Sit radius r, & ſinus rectus x: Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$ &c. Hoc eſt, $= x + \frac{1\times1\times xx}{2\times3\times rr}A + \frac{3\times3 xx}{4\times5 rr}B + \frac{5\times5 xx}{6\times7 rr}C + \frac{7\times7 xx}{8\times9 rr}D +$ &c. Vel ſit d diameter, ac x ſinus verſus; & erit Arcus $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ &c. Hoc eſt, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40dd} + \frac{5x^3}{112d^3} +$ &c.

2. Si viciſſim ex dato Arcu deſideretur Sinus: Sit radius r, & arcus z: Eritque ſinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ &c. Hoc eſt, $= z - \frac{zz}{2\times3rr}A - \frac{zz}{4\times5rr}B - \frac{zz}{6\times7rr}C -$ &c. Et ſinus verſus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ &c. Hoc eſt, $\frac{zz}{1\times2r} - \frac{zz}{3\times4rr}A - \frac{zz}{5\times6rr}B - \frac{zz}{7\times8rr}C -$ &c.

3. Si Arcus capiendus ſit in ratione data ad alium Arcum: Eſto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, & arcus quæſitus ad arcum illum datum ut n ad 1: Eritque arcus quæſiti Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2\times3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times7dd}xxC + \frac{49-nn}{8\times9dd}xxD + \frac{81-nn}{10\times11dd}xxE +$ &c. Ubi nota, quod cum n eſt numerus impar, Series deſinet eſſe infinita, & evadet eadem quæ prodit per vulgarem Algebram, ad multiplicandum datum angulum per iſtum numerum n.

4 Si

4. Si in Axe alterutro AB Ellipſeos ADB (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG, occurrens Ellipſi in G, motu angulari feratur ; & ex data Area ſectoris Elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ a puncto G ad axem normaliter demittitur : Eſto BC $= q$, DC $= r$, EB $= t$, ac duplum areæ BEG $= z$;



Et erit GF $= \frac{z}{t} - \frac{q}{6rrt^4}z^3 + \frac{10qq - 9qt}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3 + 504qqt - 225qtt}{5040r^6t^{10}}z^7 +$ &c. Sic itaque Aſtronomicum illud *Kepleri* Problema reſolvi poteſt.

5. In eadem Ellipſi, ſi ſtatuatur CD$=r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$ & CF$=x$: Erit Arcus Ellipticus DG

$$= x + \frac{1}{6cc}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14rrc^4}x^7 + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11} + \text{\&c.}$$
$$\qquad - \frac{1}{40c^4} \quad - \frac{1}{28rc^5} \quad - \frac{1}{24rrc^6} \quad - \frac{1}{22r^3c^7}$$
$$\qquad\qquad + \frac{1}{112c^6} \quad + \frac{1}{48rc^7} \quad + \frac{3}{88rrc^8}$$
$$\qquad\qquad\qquad - \frac{5}{1152c^8} \quad - \frac{5}{352rc^9}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{7}{2816c^{10}}$$

Hic numerales Coefficientes ſupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) ſunt in Muſica progreſſione : Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem Coefficientem ſupremi termini per terminos hujus progreſſionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$, $\frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$, $\frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$, $\frac{\frac{9}{6}n-9}{10}$, &c. Ubi n ſignificat numerum dimenſionum ipſius c in denominatore iſtius ſupremi termini. *E. g.* ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$ numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipſius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc eſt in 1 ; & prodit $\frac{1}{22}$ numeralis coefficiens termini proxime inferioris : dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$, ſive in $\frac{n-3}{4}$, hoc eſt, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in iſta columna. Atque iſta $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini ; & $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum uſque columnis præſtari poteſt : Adeoque valor ipſius DG per hanc Regulam pro libitu produci.

 Adhæc,

Adhæc, ſi BF dicatur x, ſitque r latus rectum Ellipſeos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus Ellipticus

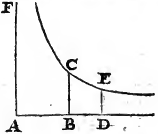
$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } \overline{1 + \frac{2 - \frac{3}{2}e}{3r}x + \frac{-2 + 3e - \frac{5}{8}ee}{5rr}x^2 + \frac{4 - 9e + \frac{23}{4}e^2 - \frac{7}{16}e^3}{7r^3}x^3 + \frac{-10 + 30e - \frac{123}{4}e^2 + \frac{91}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^4}{9r^4}x^4 + \&c.}$$

Quare, ſi ambitus totius Ellipſeos deſideretur; Biſeca CB in F, & quære Arcum DG per prius Theorema, & Arcum BG per poſterius.

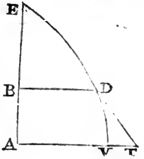
6. Si, vice verſa, ex dato Arcu Elliptico DG quæratur Sinus ejus CF; tum dicto $CD = r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & Arcu illo $DG = z$; erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{14rrc^4}z^7 - \&c.$$
$$\qquad\qquad + \frac{13}{120c^4} \qquad + \frac{71}{420rc^5}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{493}{5040c^6}$$

Quæ autem de Ellipſi dicta ſunt omnia, facile accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantum ſignis ipſorum c & e, ubi ſunt imparium dimenſionum.



7. Præterea, ſi ſit CE Hyperbola, cujus Aſymptoti AD, AF rectum angulum FAD conſtituant; & ad AD erigantur utcunque perpendicula BC, DE occurrentia Hyperbolæ in C & E: & AB dicatur a, BC b, & Area BCED z; Erit $BD = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \&c.$ Ubi Coefficientium Denominatores prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmeticæ Progreſſionis 1, 2, 3, 4, 5, &c. in ſe continuo. Et hinc ex Logarithmo dato poteſt Numerus ei competens inveniri.



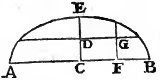
AVDB

8. Eſto VDE Quadratrix, cujus vertex eſt V; exiſtente A centro, & AE ſemidiametro Circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: Demiſſoque ad AE perpendiculo quovis DB, & acta Quadratricis Tangente DT occurrente axi ejus AV in T: Dic $AV = a$, & $AB = x$; Eritque $DB = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} - \&c.$ Et $VT = \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} + \&c.$ Et Area

AVDB $= ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} -$ &c. Et Arcus VD $= x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} +$ &c. Unde viciſſim, ex dato BD, vel VT, aut Area AVDB, arcuve VD, per Reſolutionem affectarum æquationum erui poteſt x ſeu AB.

9. Eſto denique AEB Sphæroides revolutione Ellipſeos AEB circa axem AB genita, & ſecta Planis quatuor, AB per axem tranſeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter biſecante axem, & FG parallelo CE: Sitque recta CB $= a$, CE $= c$, CF $= x$, & FG $= y$: Et Sphæroideos ſegmentum CDGF, dictis quatuor Planis comprehenſum, erit

$$
\begin{array}{llllll}
+\,2cxy & -\,\frac{x}{3c}y^3 & -\,\frac{x}{20c^3}y^5 & -\,\frac{x}{56c^5}y^7 & -\,\frac{5x}{576c^7}y^9 & -\,\&c. \\
-\,\frac{cx^3}{3aa} & -\,\frac{x^3}{18caa} & -\,\frac{x^3}{40c^3aa} & -\,\frac{5x^3}{336c^5aa} & -\,\&c. & \\
-\,\frac{cx^5}{20a^4} & -\,\frac{x^5}{40ca^4} & -\,\frac{3x^5}{160c^3a^4} & -\,\&c. & & \\
-\,\frac{cx^7}{56a^6} & -\,\frac{5x^7}{336ca^6} & -\,\&c. & & & \\
-\,\frac{5cx^9}{576a^8} & -\,\&c. & & & & \\
-\,\&c. & & & & &
\end{array}
$$



Ubi numerales Coefficientes ſupremorum terminorum $(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}$, &c.) in infinitum producuntur, multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progreſſionis $-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna deſcendentium in infinitum, producuntur multiplicando continuo coefficientem ſupremi termini, in prima columna, per eandem progreſſionem; in ſecunda autem, per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, &c. in tertia, per terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}, \frac{5\times3}{4\times5}, \frac{7\times5}{6\times7}, \frac{9\times7}{8\times9}$, &c. in quarta, per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}, \frac{7\times3}{4\times5}, \frac{9\times5}{6\times7}$, &c. in quinta, per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}, \frac{9\times3}{4\times5}, \frac{11\times5}{6\times7}$, &c. Et ſic in infinitum.

Et eodem modo ſegmenta aliorum Solidorum deſignari, & valores eorum aliquando commode per Series quaſdem numerales in infinitum produci poſſunt.

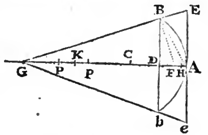
Ex his videre eſt quantum fines Analyſeos per hujuſmodi infinitas æquationes amplientur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pene dixerim problemata (ſi numeralia *Diophanti* & ſimilia excipias) ſeſe extendit.

Non

Non tamen omnino univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam methodos eliciendi Series infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad Series Infinitas per Diviſionem vel Extractionem Radicum ſimplicium affectarumve pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa Reductionem Infinitarum Serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius ſcribo, quod hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cœperunt, adeo ut ab iiſdem jam per quinque fere annos abſtinuerim.

Unum tamen addam: quod poſtquam Problema aliquod ad Infinitam Æquationem deducitur, poſſint inde variæ Approximationes, in uſum Mechanicæ, nullo fere negotio formari; quæ, per alias methodos quæſitæ, multo labore temporiſque diſpendio conſtare ſolent.

Cujus rei exemplo eſſe poſſunt Tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadratura Circuli. Nam, ut ex data Arcus Chorda A, & dimidii Arcus Chorda B, Arcum illum proxime aſſequaris; Finge arcum illum eſſe z, & circuli radium r; juxtaque ſuperiora erit A (nempe duplum Sinus dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} -$ &c. Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} -$ &c. Duc jam B in numerum fictitium n, & a producto aufer A, & reſidui ſecundum terminum, (nempe $- \frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^3}{4 \times 6rr}$,) eo ut evaneſcat, pone $= 0$; indeque emerget $n = 8$; & erit $8B - A = 3z * - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4} +$ &c. hoc eſt, $\frac{8B - A}{3} = z$; errore tantum exiſtente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in exceſſu. Quod eſt Theorema *Hugenianum.*



Inſuper, ſi in Arcus Bb ſagitta AD indefinite producta quæratur punctum G, a quo actæ rectæ GB, Gb abſcindant Tangentem Ee quam proxime æqualem Arcui iſti: Eſto Circuli centrum C, Diameter AK $= d$, & Sagitta AD $= x$: Et erit DB $(= \sqrt{dx - xx})$ $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} -$ &c.

Et AE $=$ AB $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ &c. Et AE $-$ DB : AD : : AE : AG. Quare AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175d} -$ vel $+$ &c. Finge ergo AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$: & viciſſim erit DG $(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x)$: DB : : DA : AE $-$ DB.

Quare

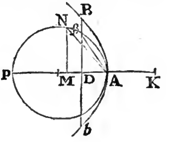
Digitized by Google

Quare $AE - DB = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Adde DB; & prodit $AE = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Hoc aufer de valore ipſius AE ſupra habito, & reſtabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}$ + vel − &c. Quare in AG cape AH quintam partem DA, & KG = HC, & actæ GBE, G*be* abſcindent Tangentem E*e* quam proxime æqualem Arcui BA*b*; errore tantum exiſtente $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ + vel − &c. multo minore ſcilicet quam in Theoremate *Hugenii*. Quod ſi fiat 7AK : 3AH :: DH : *n*; & capiatur KG = CH − *n*, erit error adhuc multo minor.

Atque ita, ſi Circuli ſegmentum aliquod BA*b* per Mechanicam deſignandum eſſet: Primo reducerem Aream iſtam in Infinitam Seriem, puta hanc $BbA = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ − &c. Dein quærerem conſtructiones Mechanicas quibus hanc Seriem proxime aſſequerer; cujuſmodi ſunt hæ: Age rectam AB, & erit ſegmentum $BbA = \overline{\frac{2}{3}AB + BD} \times \frac{4}{5}AD$ proxime; exiſtente ſcilicet errore tantum $\frac{x^3}{70d^2}\sqrt{dx}$ + &c, in defectu: Vel proximius, erit ſegmentum illud (biſecto AD in F, & acta recta BF) $= \frac{4BF + AB}{15} \times 4AD$; exiſtente errore ſolummodo $\frac{x^3}{550d^2}\sqrt{dx}$ + &c; qui ſemper minor erit quam $\frac{1}{1500}$ totius ſegmenti, etiamſi ſegmentum illud ad uſque ſemicirculum augeatur.

Sic & in Ellipſi BA*b*, [*Vid. Fig. præcedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape $PG = \frac{2}{5}AP + \frac{19AK - 21AP}{10AK} \times AD$. In Hyperbola vero, cape $PG = \frac{2}{5}AP + \frac{19AK + 21AP}{10AK} \times AD$. Et acta recta GBE abſcindet tangentem AE quam proxime æqualem Arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo Arcus ille non ſit nimis magnus.

Et pro Area Segmenti Hyperbolici B*b*A; in DP cape $MD = \frac{3AD^2}{4AK}$, & ad D & M erige perpendicula Dβ, MN occurrentia ſemicirculo ſuper Diametro AP deſcripto: Eritq; $\frac{4AN + A\beta}{15} \times 4AD = BbA$ proxime: Vel proximius, erit $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD = BbA$; ſi modo capiatur $DM = \frac{5AD^2}{7AK}$.



Cantabrigiæ
Junii 13. 1676.

Tuus, &c.
Iſ. Newton.

Q

Epiſtola

Epiſtola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 27 Auguſti 1676 *data, cum D.* Newtono *communicanda.*

Clariſſimo Viro, D. Henrico Oldenburgio, Godefredus Guilielmus Leibnitius.

Literæ tuæ, die 26 *Julii* datæ, plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent, quam multa volumina ſpiſſa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac Clariſſimis Viris *Newtono* ac *Collinio* gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum eſſe voluiſtis.

Inventa *Newtoni* ejus ingenio digna ſunt, quod ex Opticis Experimentis & Tubo Catadioptrico abunde eluxit.

Ejuſque methodus inveniendi Radices Æquationum & Areas Figurarum, per Series Infinitas, prorſus differt a mea: Ut mirari libeat diverſitatem itinerum per quæ eodem pertingere licet.

Mercator Figuras Rationales, ſeu in quibus Ordinatarum valor ex datis Abſciſſis rationaliter exprimi poteſt, (ut ſcilicet indeterminata Quantitas in vinculum non ingrediatur,) quadravit; & ad Infinitas Series reducere docuit, per Diviſiones. *Newtonus* autem, per Radicum Extractiones. Mea Methodus Corollarium eſt tantum doctrinæ generalis de *Transformationibus*; cujus ope Figura propoſita quælibet, quacunque Æquatione explicabilis, tranſmutatur in aliam Analyticam æquipollentem; talem ut, in ejus Æquatione, ordinatæ dimenſio non aſcendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam Simplicem Dignitatem ſeu Infimum gradum. Ita fiet ut quælibet Figura, vel per Extractionem Radicis Cubicæ vel Quadraticæ, *Newtoni* more; vel etiam, Methodo *Mercatoris*, per ſimplicem Diviſionem; ad Series Infinitas reduci queat.

Ego vero ex his Tranſmutationibus ſimpliciſſimam ad rem præſentem delegi. Per quam ſcilicet * unaquæque Figura transformatur in aliam æquipollentem rationalem; in cujus æquatione, Ordinata in nullam prorſus aſcendit Poteſtatem: Ac proinde ſola *Mercatoris* Diviſione per Infinitam Seriem exprimi poteſt.

Ipſa porro * generalis Tranſmutationum methodus, mihi inter potiſſima Analyſeos cenſenda videtur. Neque enim tantum ad Series Infinitas, & ad

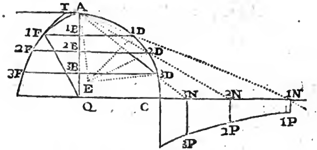
* Hic modus tranſmutandi figuras Curvilineas in alias ipſis æquales, ejuſdem eſt generis cum Tranſmutationibus *Barrovianis* & *Gregorianis*. Et Conicæ Sectiones hac Methodo ſemper ad Series Infinitas reduci poſſunt per diviſiones. Generalis tamen non eſt: Nam ſi Curva ſit ſecundi generis, incidetur in æquationem quadraticam; ſi tertii generis in cubicam, ſi quarti in quadrato-quadraticam, ſi quinti in quadrato-cubicam, &c. præterquam in caſibus quibuſdam valde particularibus. Per extractiones vero Radicum Problemata facilius ſolvuntur abſque Tranſmutationibus.

Digitized by Google

& ad Approximationes ; ſed & ad ſolutiones Geometricas, aliaque innumera vix alioqui tractabilia inſervit. Ejus vero fundamentum vobis candide libereque ſcribo ; perſuaſus quæ apud vos habentur præclara mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc eſt : Ut figura propoſita rectis innumeris utcunque, modo ſecundum aliquam regulam ſive legem ductis, reſolvatur in partes ; quæ partes, aut aliæ ipſis æquales, alio ſitu aliave forma reconjunctæ, aliam componant figuram priori æquipollentem ſeu ejuſdem Areæ, etſi alia longe figura conſtantem. Unde ad Quadraturas abſolutas, vel hypotheticas Geometricas, vel ſerie infinita expreſſas Arithmeticas, jamjam multis modis perveniri poteſt.

Ut intelligatur ; Sit Figura AQCDA. Ea, ductis rectis BD parallelis, reſolvi poteſt in Trapezia 1B 2D, 2B 3D, &c. Sed, ductis rectis convergentibus ED, reſolvi poteſt in Triangula E 1D 2D, E 2D 3D, &c.



Si jam alia ſit Curva A 1F 2F 3F, cujus Trapezia 1B 2F, 2B 3F ſint Triangulis E 1D 2D, E 2D 3D ordine reſpondentibus æqualia, tota figura AE 3D 2D 1DA, toti figuræ A 1F 2F 3F 3B A erit æqualis.

Quinetiam Trapezia Trapeziis conferendo, fieri poteſt ut 1N 2P, vel quod eodem redit, Rectangulum 1N 2P, ſit æquale Trapezio reſpondenti 1B 2D, ſive Rectangulo 1B 2D ; tametſi recta 1N 1P non ſit æqualis rectæ 1B 1D, modo ſit 1N 2N ad 1B 2B ut 1B 1D ad 1N 1P ; quod infinitis modis fieri poteſt.

Quæ omnia talia ſunt ut cuivis ſtatim ordine progredienti, ipſa natura duce, in mentem veniant ; contineantque Indiviſibilium Methodum generaliſſime conceptam, nec (quod ſciam) hactenus ſatis univerſaliter explicatam. Non tantum enim Parallelæ & Convergentes, ſed & aliæ quæcunque certa lege ductæ, rectæ vel curvæ, adhiberi poſſunt ad Reſolutionem. Quanta autem & quam abſtruſa hinc duci poſſint, judicabit qui methodi univerſalitatem animo erit complexus. Certum enim eſt omnes Quadraturas hactenus notas, abſolutas vel hypotheticas, nonniſi exigua ejus ſpecimina eſſe.

Sed

Sed nunc quidem ſuffecerit applicationem oſtendere ad id de quo agitur; Series ſcilicet infinitas, & modum Transformandi figuram datam in aliam æquipollentem rationalem, *Mercatoris* Methodo tractandam.

AQCA ſit Quadrans Circuli: Radius $AQ = r$: Abſciſſa $A\,1B = x$: Ordinata $1B\,1D = y$: Æquatio pro Circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta A 1D: producaturque donec ipſi QC etiam productæ occurrat in 1N: Et Q 1N vocetur z. Et ** erit A 1B ſeu $x = \frac{2r^3}{r^2 + z^2}$: Et 1B 1D ſive $y = \frac{2zr^2}{r^2 + z^2}$. Eodem modo, ductâ A 2D 2N, ſi $Q\,2N = z - \beta$ (poſita ſcilicet $1N\,2N = \beta$) erit $A\,2B = \frac{2r^3}{r^2 + z^2 - 2z\beta + \beta^2}$; & A 2B — A 1B, ſive recta 1B 2B, erit $\frac{2r^3}{r^2 + z^2 - 2z\beta + \beta^2} - \frac{2r^3}{r^2 + z^2}$. Sive, poſita β infinite parva, (poſt deſtructiones & diviſiones,) erit $1B\,2B = \frac{4r^3 z\beta}{\overline{r^2 + z^2}|^2}$. Habita ergo recta 1B 1D, & recta 1B 2B, habebitur valor Rectanguli 1D 2B, multiplicatis eorum valoribus in ſe invicem; habebitur inquam $\frac{8r^5 z^2 \beta}{\overline{r^2 + z^2}|^3}$ pro valore Rectanguli 1D 2B.

Sit jam Curvæ 1P 2P 3P &c. natura pro arbitrio aſſumpta talis, ut Ordinata ejus 1N 1P (ex data abſciſſa Q 1N ſive z) ſit $\frac{8r^5 z^2}{\overline{r^2 + z^2}|^3}$. Ideo, quoniam $1N\,2N = \beta$, erit rectangulum 1P 2N, etiam $\frac{8r^5 z^2 \beta}{\overline{r^2 + z^2}|^3}$. Ac proinde æquale Rectangulo 1D 2B, & ſpatium 1P 1N 3N 3P 2P 1P æquale ſpatio Circulari reſpondenti 1D 1B 3B 3D 2D 1D. Eſt autem quælibet Ordinata NP rationalis, ex data abſciſſa QN; quia, poſitâ $QN = z$, Ordinata NP eſt $\frac{8r^5 z^2}{\overline{r^2 + z^2}|^3}$, ſive $\frac{8r^5 z^2}{r^6 + 3r^4 z^2 - 3r^2 z^4 + z^6}$. Ergo ipſa per Infinitam Seriem Integrorum exprimi poteſt, Dividendo. Et Spatium talibus Ordinatis comprehenſum, æquipollens Circulari, infinita Serie numerorum Rationalium, Methodo *Mercatoris* quadrari poteſt. Quod cum facillimum ſit facere hic omitto. Neque enim elegantiæ ſuæ, ſed Methodi Generalis explicandæ cauſa, hoc exemplum aſſumpſi.

Ita ſiquis loco Circuli mihi dediſſet Curvam, in qua Ordinata aſcendiſſet ad gradum Cubicum, potuiſſem eam reducere ad Curvam, in qua Ordinata non aſſurrexiſſet ultra Quadratum, vel etiam ne quidem ad Quadratum.

Ita-

** *N.B.* D. *Leibnitius* hanc Methodum vulgari more prolixius hic exponit, quam Analyſis ejus nova paucis exhibere potuiſſet, ideoque Analyſin illam novam nondum invenerat.

Digitized by Google

Itaque ſemper, ſive Extractionibus Radicum *Newtonianis* (gradus cujuſlibet dati), vel Diviſionibus *Mercatoris*, poterit cujuſlibet Figuræ ſpatium inveniri, interventu alterius æquipollentis. Multum autem ad Simplicitatem intereſt quid eligas.

Omnium vero poſſibilium Circuli, & Sectoris Conici Centrum habentis cujuſlibet, per Series Infinitas quadraturarum, ſimpliciſſimam hanc eſſe dicere auſim quam nunc ſubjicio.

Sit QA 1F [*Vid. Fig. præcedent.*] Sector, duabus rectis in Centro Q concurrentibus & Curva Conica A 1F, ad Verticem A ſive Axis extremum perveniente, comprehenſus. Tangenti Verticis AT occurrat Tangens 1FT. Ipſum AT vocemus t; & Rectangulum ſub Semi-latere Recto in Semi-latus Tranſverſum ſit Unitas. Erit † Sector Hyperbolæ, Circuli vel Ellipſeos, per Semi-latus Tranſverſum diviſus, $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$ &c. Signo ambiguo $\pm$ valente $+$ in Hyperbola, $-$ in Circulo vel Ellipſi. Unde, poſito Quadrato Circumſcripto 1, erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. Quæ expreſſio, jam Triennio abhinc & ultra a me communicata amicis, haud dubie omnium poſſibilium ſimpliciſſima eſt maximeque afficiens mentem.

Unde duco Harmoniam ſequentem; *

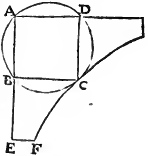
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}\ \&c. = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{63} \quad \frac{1}{99}\ \&c. = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{80} \quad \frac{1}{120}\ \&c. = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{99}\ \&c.$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{120}\ \&c.$$



Ubi $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. exprimit Aream Circuli ABCD, & $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ &c. aream Hyperbolæ æquilateræ BCEF, cum ſit BC dupla ipſius EF, & quadratum inſcriptum $= \frac{1}{2}$. Numeri 3, 8, 15, 24, &c. ſunt Quadrati Unitate minuti.

Viciſſim, †† ex Seriebus Regreſſuum pro Hyperbola hanc inveni. Si ſit numerus aliquis Unitate minor $1 - m$, ejuſque Logarithmus Hyperbolicus l. Erit $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c. Si numerus ſit major Unitate, ut $1 + n$; tunc pro eo inveniendo mihi etiam †† prodiit Regula, quæ in *Newtoni* Epiſtola expreſſa eſt; ſcilicet erit $n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c. Prior tamen celerius appropinquat. Ideoque

† Vid. pag. 25, lin. 10, & pag. 41. lin. 8. * Vide Acta Lipſica *Feb.* 1682.

efficio ut ea poſſim uti, etiam cum major eſt Unitate numerus $1+n$. Nam idem eſt Logarithmus pro $1+n$ & pro $\frac{1}{1+n}$. Unde, ſi $1+n$ ſit major Unitate, erit $\frac{1}{1+n}$ minor Unitate. Fiat ergo $1-m=\frac{1}{1+n}$, ac inventa m, habebitur & $1+n$ numerus quæſitus.

Quod regreſſum ex Arcubus attinet, †† incideram ego directe in Regulam, quæ ex dato Arcu Sinum Complementi exhibet. Nempe, Sinus Complementi $= 1 - \frac{a^2}{1\times2} + \frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. Sed poſtea quoque deprehendi ex ea, illam nobis communicatam pro inveniendo Sinu Recto, qui eſt $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1\times2\times3} + \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c, poſſe demonſtrari. Quod tribus verbis ſic fit. Summa Sinuum Complementi ad Arcum, ſeu omnium $1 - \frac{a^2}{1\times2} + \frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. eſt $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1\times2\times3} + \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Porro, Summa Sinuum Complementi ad Arcum (ſeu Arcui in locis debitis inſiſtentium) æquatur Sinui Recto ducto in Radium, ut notum eſt Geometris; id eſt, æquatur ipſi Sinui Recto; quia Radius hic eſt Unitas. Ergo Sinus Rectus $= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1\times2\times3} + \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Hinc etiam, ex dato Arcu & Radio, ſine ulla prorſus aliorum notitia, haberi poteſt Area Segmenti Circularis duplicati: quæ eſt $\frac{a^3}{1\times2\times3} - \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c. Unde optime Segmentorum Tabula ad Gradus & Minuta &c. calculabitur.

Pro Trigonometricis autem operationibus, percommoda mihi videtur hæc expreſſio: Ut Sinus Complementi c ponatur $= 1 - \frac{a^2}{1\times2} + \frac{a^4}{1\times2\times3\times4}$; quoniam ſola, memoria retenta, omnibus caſibus & operationibus, directis ſcilicet ſimul & reciprocis, ſufficit; Quod ideo fit, quoniam Æquatio $c = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ eſt plana. Unde ſi viciſſim quæras Arcum ex Sinu Complementi, radix extrahi poteſt; adeoque fiet Arcus $a = \sqrt{6 - \sqrt{24c+12}}$ exacte ſatis ad uſum eorum qui in itineribus Tabularum commoditate carent; quia error æquationis non eſt $\frac{a^6}{720}$.

†† *N. B.* Methodum perveniendi ad has Series *Leibnitius* a *Newtono* jam modo acceperat, idque ex ipſius rogatu. Imo Series ipſas a *Newtono* una cum Methodo perveniendi ad eaſdem jam modo acceperat, & pro Hyperbola ſignum tantum mutavit; pro Circulo Sinum Verſum a *Newtono* acceptum ſubduxit a Radio, ut haberet Sinum complementi.

Innu-

Innumera alia poſſent dici, quæ his fortaſſe elegantia & exactitudine non cederent. Sed ego ita ſum comparatus ut plerumque, Methodis Generalibus detectis, rem in poteſtate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim iſta omnia magnopere æſtimanda ſunt, niſi quod artem Inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quæ obſcuriora videbuntur, ea libenter elucidabo: Et illud quoque explicabo, quomodo hac Methodo Æquationum quoque utcunque Affectarum Radices per Infinitam Seriem dari poſſint, ſine ulla Extractione; quod mirum fortaſſe videbitur.

Sed deſideraverim ut Clariſſimus *Newtonus* nonnulla quoque amplius explicet; ut Originem Theorematis quod initio ponit: Item, Modum quo quantitates *p*, *q*, *r*, in ſuis Operationibus invenit: Ac denique, Quomodo in Methodo Regreſſuum ſe gerat, ut cum ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo ſua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus Literas qua merentur diligentia legere: quoniam tibi e veſtigio reſpondere volui. Unde non ſatis nunc quidem affirmare auſim, an nonnulla eorum quæ ſuppreſſit, ex ſola earum lectione conſequi poſſum. Sed optandum tamen foret, ipſum ea potius ſupplere *Newtonum*: Quia credibile eſt, non poſſe eum ſcribere, quin aliquid ſemper præclari nos doceat (ut apparet) egtegiarum meditationum plenus.

Ad alia tuarum literarum venio; quæ Doctiſſimus *Collinius* communicare gravatus non eſt. Vellem adjeciſſet appropinquationis *Gregorianæ* linearis Demonſtrationem. Credo tamen aliam haberi ſimpliciorem, etiam in infinitum euntem; quæ fiat ſine ulla Biſectione Anguli, imo, ſine ſuppoſita Circuli Conſtructione; ſolo Rectarum ductu.

Vellem *Gregoriana* omnia conſervari. Fuit enim his certe ſtudiis promovendis aptiſſimus: Cæterum ejus demonſtrationi editæ, de Impoſſibilitate Quadraturæ abſolutæ Circuli & Hyperbolæ, multa haud dubie deſunt.

De Æquationum Radicibus Surdis Generalibus inveniendis; ſive, quod idem eſt, tollendis Æquationum poteſtatibus intermediis, multa & ego meditatus ſum; & jam Vere anni ſuperioris Specimina *Hugenio* communicaveram Regularum *Cardanicis* ſimilium. Seriem enim habebam ejuſmodi Regularum in infinitum euntem; in quibus & *Cardanica* continebatur. Sed ultra gradum Cubicum non erant Generales. Perſpexi tamen inde veram Methodum progrediendi longius. Quamquam multis adhuc opus ſit artibus, quas excutiendas libenter ingenioſiſſimo *Tſchürnhauſio* relinquo; qui hic ad eadem quæ ego habebam Specimina, imo & alia præterea, etiam de ſuo pervenit.

Ex iis quæ *Collinius* ait de *Gregoriana* Methodo, difficile non fuit nobis certo divinare in quo conſiſtat ejus ſubſtantia.

Imagi-

Imaginariarum quantitatum in Realium Radicum expreſſiones ingredientium ſublationem, fruſtra putem ſperari, imo quæri. Neque enim illæ ullo modo vel Calculis vel Conſtructionibus obſunt: Et Veræ Realeſque ſunt Quantitates, ſi inter ſe conjunguntur, ob deſtructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis & Argumentis deprehendi.

Exempli gratia, $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tametſi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$, neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ radix extrahetur; nec proinde ſic deſtruetur imaginaria $\sqrt{-3}$: ſupponenda tamen eſt deſtructa eſſe virtualiter, quod actu appareret ſi fieri poſſet Extractio. Alia tamen via hæc ſumma reperitur eſſe $\sqrt{6}$. Unde in Cubicis Binomiis ubi realitas ejuſmodi formularum (tunc cum Extractio ex ſingulis Binomiis fieri nequit) ad oculum oſtendi non poteſt; mente tamen intelligitur. Quare fruſtra *Carteſius* aliique expreſſiones *Cardanicas* pro particularibus habuere. Siquis poſſet invenire Quadraturam Circuli & ejus Partium, ex data Hyperbolæ & ejus Partium quadratura, is poſſet eas tollere; modo in ipſam Quadraturam imaginariæ illæ rurſus ingrediantur.

Cæterum ex illis quas habeo meditationibus circa Radices æquationum irrationales, neceſſario ſequitur res ſatis Paradoxa: Scilicet omnes Æquationes gradus Octavi, Noni, Decimi, poſſe ad gradum Septimum reduci. Itaque & omnia Problemata ad Decimum gradum uſque occurrentia poſſunt ad Septimum deprimi.

Horribiles Calculi ſubeundi erunt illi qui in hoc Argumentum velut per vim irrumpet; ſed facillimi ipſi qui ante meditabitur: cum, ut prævideo, ipſa natura rei ducat ad compendia quædam, per quæ ſpes eſt Calculi magnam partem abſcindi; remque elegantibus artificiis, Ingenii potius vi quam Calculi labore, tranſigi poſſe.

Sed ſiquis laborem non ſubterfugeret, eum docere poſſum Methodum Analyticam generalem infallibilem, per quam omnium Æquationum radices generales invenire liceret.

Verum meliora illis proponerem agenda qui Calculo delectarentur. Conſilium enim habeo Tabularum Analyticarum, quæ non minoris futuræ eſſent uſus in Analyſi, quam Tabulæ Sinuum in Geometria Practica; imo, arbitror, qui paulum in iis calculandis verſatus ſit, eum progreſſiones reperturum in infinitum, quarum ope magna Tabulæ pars ſine labore continuari poſſit. Nihil eſt quod norim in tota Analyſi momenti majoris. Nam in his Tabulis pleraque Problemata ſtatim ſoluta haberentur, aut levi opera poſſint inde deduci.

Pendet negotium ex re longe majore, Arte ſcilicet Combinatoria generali ac vera. Cujus vim ac poteſtatem neſcio an quiſquam hactenus ſit conſequutus. Ea vero nihil differt ab Analyſi illa ſuprema, ad cujus intima, quantum judicare poſſum, *Carteſius* non pervenit. Eſt enim ad eam conſtituendam opus Alphabeto Cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus Alphabeti, opus eſt Analyſi Axiomatum. Sed non mi-

ror

Digitized by Google

ror iſta nemini ſatis conſiderata: Quia plerumque facilia negligimus; & multa, quæ clara videntur, aſſumimus. Quod quamdiu faciemus, nunquam ad illud perveniemus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus ſummum; nec genus Calculi etiam non-Mathematicis accommodati obtinebimus.

Optarim Cl. *Pellium* generalia ſua Meditata, & illud ſpeciatim quod memoras *Cribrum Eratoſthenis*, non ſupprimere. Nam etſi omnia forte quæ deſtinarat non abſolverit; meditata tamen ipſa & Conſilia egregiorum Virorum non perire publici intereſt. Utilia quoque futura ſunt quæ de Sinuum Tabula ad Æquationes accommodanda habet. Item de Limitibus & Radicibus.

Quod dicere videmini, pleraſque difficultates (exceptis Problematibus *Diophantæis*) ad Series Infinitas reduci, id mihi non videtur. Sunt enim multa uſque adeo mira & implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia ſunt (ex multis aliis) Problemata * methodi Tangentium inverſæ; quæ etiam *Carteſius* in poteſtate non eſſe faſſus eſt.

In tomo 3° Epiſtolarum, una habetur ad *Beaunium*, in qua, ad propoſitas a *Beaunio*, Curvas quaſdam invenire conatur; quarum una eſt Ludus Naturæ, ut intervallum inter Tangentem ad (axem) directricem uſque productam & Ordinatim-applicatam ex Curva ad directricem ſit ſemper idem; recta ſcilicet conſtans. Hanc Curvam nec *Carteſius* nec *Beaunius* nec quiſquam alius (quod ſciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, cœpi quærere, ſtatim certa Analyſi ſolvi. Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere deſiderari poteſt conſecutum: quamquam maximi momenti eſſe ſciam. Ac de his quidem nunc ſatis.

Ego id agere conſtitui, ubi primum otium nactus ero, ut rem omnem Mechanicam reducam ad puram Geometriam; problemataque circa Elateria, & Aquas, & Pendula, & Projecta, & Solidorum Reſiſtentiam, & Frictiones, &c. definiam. Quæ hactenus attigit nemo. Credo autem rem omnem nunc eſſe in poteſtate; ex quo circa Regulas Motuum mihi penitus perfectis demonſtrationibus ſatisfeci; neque quicquam amplius in eo genere deſidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex Axiomate Metaphyſico pulcherrimo; quod non minoris eſt momenti circa Motum, quam hoc, *totum eſſe majus parte*, circa magnitudinem.

De Centro-baricis quoque ſingularem quendam aditum reperi ad novas ac plane a prioribus diverſas contemplationes, in Geometria pariter ac Mechanica magno uſui futuras. Hæc ubi (Deo volente) abſolvero, reliquum temporis, quod ſcilicet Philoſophicis meditationibus deſtinare fas erit, Naturæ indagationi debeo.

Tſchürnhauſius proximo Tabellione ſcribet.

* Si æquationes differentiales D. *Leibnitio* jam innotuiſſent, haud dixiſſet Problemata Methodi Tangentium inverſæ ab Æquationibus non pendere.

Excerpta ex Epiſtola D. Ehrenfried de Tſchürnhauſe *ad D.* Oldenburgum, Pariſiis 1° Septemb. 1676 *data, cujus extat exemplar manu D.* Collins *deſcriptum.*

EXpectabam cum deſiderio reſponſum, cum aliquot abhinc menſibus ad te literas meas tranſmiſeram; ſed nec ex modo datis colligere licet has receptas fuiſſe. Interim admodum oblectatus fui, hiſce conſpectis quæ ad D. *Leibnitium* exaraſti; maximeque me tibi devinxiſti, quod me participem volueris facere tam ingenioſarum inventionum, & promotionis Geometriæ tam pulchræ quam utilis. Statim curſim eas pervolvi, ut viderem num forte inter haſce Series Infinitas exiſteret * ea qua ingenioſiſſimus D. *Leibnitius* Circulum, imo quamvis ſectionem Conicam (centro in finita diſtantia gaudentem) quadravit, tali ratione ut mihi perſuadeam ſimpliciorem viam, nec quoad linearem conſtructionem, nec numeralem expreſſionem, nunquam viſum iri; quique hiſce porro inſiſtens, generalem adinvenit Methodum Figuram quamvis datam in talem rationalem tranſmutandi, quæ per ſolum inventum (admodum præſtans meo judicio) D. *Mercatoris*, ad Seriem Infinitam poſſet reduci; ſed hac de materia, cum ipſe non ita pridem mentem ſuam declaravit, non opus eſt ut prolixior ſim. Verum ut ad ſpecimina perquam ingenioſa D. *Newtoni* revertar, hæc non potuere non mihi placere, tam ob utilitatem qua ſe tam late ad quarumvis quantitatum dimenſiones, ac alia difficilia enodanda in Mathematicis extendunt, quam ob deductionem harum a fundamentis non minus generalibus quam ingenioſis derivatam: non obſtante quod exiſtimem, ad quantitatem quamvis ad infinitam ſeriem æquipollentem reducendam, fundamenta adhuc dari & ſimpliciora & univerſaliora, quam ſunt fractionum & irrationalium reductio ad tales Series, ope Diviſionis aut Extractionis; quæ mihi tale quid non niſi per accidens præſtare videntur: cum hæc ſucceſſum quoque habeant, licet non adſint fractiones aut irrationales Quantitates. Similia porro * quæ in hac re præſtitit eximius ille Geometra *Gregorius* memoranda certe ſunt, & quidem optime famæ ipſius conſuluri, qui ipſius relicta Manuſcripta luci publicæ ut exponantur operam navabunt.

* Annon D. *Tſchürnhauſe* viderat Excerpta ex *Gregorii* Epiſtolis cum D. *Leibnitio* communicata, ubi habetur Series *Gregorii* quam *Leibnitio* hic tribuit? Vide pag. 46 & 47.

Epiſtola

Digitized by Google

Epiſtola D. Newtoni *poſterior, ad D.* Oldenburgum, *Octob.* 24 1676 *data, cum D.* Leibnitio *communicanda.*

Vir Digniſſime,

QUanta cum voluptate legi Epiſtolas Clariſſimorum Virorum D. *Leibnitii* & D. *Tſchürnhauſii* vix dixerim.

Perelegans ſane eſt *Leibnitii* methodus perveniendi ad Series Convergentes: & ſatis oſtendiſſet ingenium Authoris, etſi nihil aliud ſcripſiſſet. Sed quæ alibi per Epiſtolam ſparſit ſuo nomine digniſſima efficiunt etiam ut ab eo ſperemus maxima. Diverſitas modorum quibus eodem tenditur eo magis placuit, quod mihi tres Methodi perveniendi ad ejuſmodi Series innotuerant; adeo ut novam nobiſcum communicandam vix expectarem.

Unam e meis prius deſcripſi: jam addo aliam; illam ſcilicet qua primum incidi in has Series. Nam incidi in eas antequam ſcirem Diviſiones & Extractiones Radicum quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum eſt fundamentum Theorematis ſub initio Epiſtolæ prioris poſiti, quod D. *Leibnitius* a me deſiderat.

Sub initio ſtudiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in * opera Celeberrimi *Walliſii* noſtri, conſiderando Series quarum intercalatione ipſe exhibet Aream Circuli & Hyperbolæ; utpote quod in Serie Curvarum, quarum Baſis ſeu Axis communis ſit x, & Ordinatim-applicatæ $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{5}{2}}$. &c. ſi Areæ alternarum quæ ſunt x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. interpolari poſſent, haberemus Areas intermediarum; quarum prima $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ eſt Circulus: ad has interpolandas notabam, quod in omnibus, primus terminus eſſet x, quodque ſecundi termini $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, &c. eſſent in Arithmetica progreſſione; & proinde quod duo primi termini Serierum intercalandarum deberent eſſe $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$, &c.

Ad reliquas intercalandas conſiderabam, quod Denominatores 1, 3, 5, 7, &c. erant in Arithmetica progreſſione; adeoque ſolæ Numeratorum Coefficientes numerales eſſent inveſtigandæ. Hæ autem in alternis datis Areis erant figuræ poteſtatum numeri undenarii; nempe harum 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4. Hoc eſt, primo 1; deinde 1, 1; tertio 1, 2, 1; quarto 1, 3, 3, 1; quinto 1, 4, 6, 4, 1; &c.

* Vide D. *Walliſii* Arithmeticam infinitorum, Prop. 118, 121, &c. Ejuſque Algebram, Cap. 82.

Quærebam

Quærebam itaque, quomodo in his Seriebus, ex datis duabus primis ~~figuris, reliquæ derivari poſſent.~~ Et inveni quod poſita ſecunda figura m, reliquæ producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei, $\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$ &c.

Exempli gratia ; Sit (terminus ſecundus) $m = 4$; & erit $4 \times \frac{m-1}{2}$, hoc eſt 6, tertius terminus ; & $6 \times \frac{m-2}{3}$, hoc eſt 4, quartus ; & $4 \times \frac{m-3}{4}$, hoc eſt 1, quintus ; & $1 \times \frac{m-4}{5}$, hoc eſt 0, ſextus ; quo ſeries in hoc caſu terminatur.

Hanc Regulam itaque applicui ad Series interſerendas. Et cum, pro Circulo, ſecundus terminus eſſet $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, poſui $m = \frac{1}{2}$; & prodierunt termini $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$ ſive $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ ſive $+\frac{1}{16}$; $+\frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$ ſive $-\frac{5}{128}$; & ſic in infinitum. Unde cognovi deſideratam Aream ſegmenti Circularis eſſe $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ &c.

Et eadem ratione prodierunt etiam interſerendæ areæ reliquarum Curvarum : ut & area Hyperbolæ & cæterarum alternarum in hac Serie $\overline{1+xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$, &c.

Et eadem eſt ratio intercalandi alias Series, idque per intervalla duorum pluriumve terminorum ſimul deficientium.

Hic fuit primus meus ingreſſus in has meditationes : qui e memoria ſane exciderat, niſi oculos in adverſaria quædam ante paucas ſeptimanas retuliſſem.

Ubi vero hæc didiceram, mox conſiderabam terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{6}{2}}$, &c. hoc eſt, 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$, &c. eodem modo interpolari poſſe ac areas ab ipſis generatas : & ad hoc nihil aliud requiri quam omiſſionem denominatorum 1, 3, 5, 7, &c. in terminis exprimentibus areas ; hoc eſt, coefficientes terminorum quantitatis intercalandæ $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$, vel generaliter $\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

Adeoque (exempli gratia) $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, valeret $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}z^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ &c.

Sic itaque innotuit mihi generalis Reductio Radicalium in infinitas Series, per Regulam quam poſui initio Epiſtolæ prioris, antequam ſcirem Extractiones Radicum.

Sed,

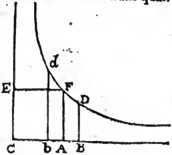
Sed, hac cognita, non potuit altera me diu latere. Nam ut probarem has operationes, multiplicavi $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ &c. in ſe; & factum eſt $1 - xx$, terminis reliquis in infinitum evaneſcentibus per continuationem ſeriei. Atque ita $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ &c. bis in ſe ductum produxit $1 - xx$. Quod, ut certa fuerit harum concluſionum Demonſtratio, ſic me manuduxit ad tentandum e converſo, num hæ Series, quas ſic conſtitit eſſe Radices quantitatis $1 - xx$, non poſſent inde extrahi more Arithmetico. Et res bene ſucceſſit. Operationis forma in Quadraticis Radicibus hæc erat.

$$1 - xx \; (1 - \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 \text{ \&c.}$$
$$\underline{1}$$
$$0 - xx$$
$$\underline{-xx + \tfrac{1}{4}x^4}$$
$$-\tfrac{1}{4}x^4$$
$$\underline{-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^6 + \tfrac{1}{64}x^8}$$
$$-\tfrac{1}{8}x^6 - \tfrac{1}{64}x^8$$

His perſpectis neglexi penitus interpolationem Serierum; & has operationes tanquam fundamenta magis genuina ſolummodo adhibui. Nec latuit Reductio per Diviſionem; res utique facilior.

Sed & Reſolutionem affectarum Æquationum mox aggreſſus ſum, eamque obtinui. Unde ſimul Ordinatim-applicatæ, Segmenta Axium, aliæque quælibet Rectæ, ex Areis Curvarum vel Arcubus datis innotuere. Nam regreſſio ad hæc nihil indigebat præter Reſolutionem Æquationum, quibus Areæ vel Arcus ex datis rectis dabantur.

Eo tempore Peſtis ingruens, [*quæ contigit annis 1665, 1666,*] coegit me hinc fugere, & alia cogitare. Addidi tamen ſubinde condituram quandam Logarithmorum ex Area Hyperbolæ, quam hic ſujungo.



Sit dFD Hyperbola, cujus Centrum C, Vertex F, & Quadratum interjectum CAFE $= 1$. In AC cape AB, Ab hinc inde $= \frac{1}{10}$ ſeu 0.1: Et, erectis perpendiculis BD, bd ad Hyperbolam terminatis, erit ſemi-ſumma ſpatiorum AD & Ad $= 0.1 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7}$ &c. et ſemi-differentia $= \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ &c. Quæ reductæ ſic ſe habent;

0.1000000000000	0.0050000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	12500
1111	100
9	1
0.1003353477310	0.0050251679267

Horum

Horum ſumma 0.105360515657 7 eſt *Ad*; & differentia 0.095310179804 3 eſt AD. Et eadem ratione, poſitis AB, *Ab* hinc inde = 0.2, obtinebitur *Ad* = 0.22314355131 42, & AD = 0.1823215567939. Habitis ſic Logarithmis Hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, & 1.2; cum ſit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$; & 0.8 & 0.9, ſint minores Unitate: adde Logarithmos eorum ad duplum Logarithmi 1.2, & habebis 0.6931471805597 Logarithmum Hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde Log. 0.8 (ſiquidem ſit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$,) & habebis 2.302585092993 3 Logarithmum numeri 10: Indeque per Additionem ſimul prodeunt Logarithmi numerorum 9 & 11: Adeoque omnium Primorum horum 2, 3, 5, 11 Logarithmi in promptu ſunt. Inſuper, ex ſola depreſſione numerorum ſuperioris computi per loca Decimalia & Additione, obtinentur Logarithmi Decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02; ut & horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002. Et inde per Additionem & Subductionem prodeunt Logarithmi Primorum 7, 13, 17, 37, &c. Qui una cum ſuperioribus, per Logarithmum numeri 10 diviſi, evadunt veri Logarithmi in Tabulam inſerendi. Sed hos poſtea propius obtinui.

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otioſus eo tempore produxi. Nam tunc ſane nimis delectabar inventis hiſce. Sed ubi prodiit ingenioſa illa * *Nicolai Mercatoris* Logarithmotechnia (quem ſuppono ſua primum inveniſſe) cœpi ea minus curare; ſuſpicatus, vel eum noſſe Extractionem Radicum æque ac Diviſionem Fractionum; vel alios ſaltem, Diviſione patefacta, inventuros reliqua, prius quam ego ætatis eſſem maturæ ad ſcribendum.

Eo ipſo tamen tempore quo liber iſte prodiit, communicatum eſt per amicum D. *Barrow* (tunc Matheſeos Profeſſorem *Cantab.*) cum D. *Collinio*, † compendium quoddam Methodi harum Serierum; in quo ſignificaveram Areas & Longitudines Curvarum omnium, & Solidorum ſuperficies & Contenta, ex datis Rectis; & vice verſa, ex his datis Rectas determinari poſſe: & Methodum ibi indicatam illuſtraveram diverſis ſeriebus.

Suborta deinde inter nos Epiſtolati conſuetudine; D. *Collinius*, Vir in rem Mathematicam promovendam natus, non deſtitit ſuggerere ut hæc publici

* Mathematici priores invenerunt hoc Theorema, quod *ſumma terminorum progreſſionis Geometricæ in infinitum pergentis eſt ad terminorum primum & maximum, ut hic terminus ad differentiam duorum terminorum primorum.* Idem demonſtratur Arithmetice multiplicando extrema & media. Demonſtravit *Walliſius* dividendo rectangulum ſub mediis per extremum ultimum. Vide *Walliſii* opus Arithmeticum Anno 1657 editum cap.33. §68. Per *Walliſii* diviſionem *Mercator* demonſtravit Quadraturam Hyperbolæ a D. *Brounker* prius inventam. Et *Gregorius* idem demonſtravit Geometrice. Sed horum nemo methodum generalem quadrandi curvas per diviſionem invenit. *Mercator* hoc nunquam profeſſus eſt. *Gregorius* ejuſmodi methodum, licet vir acutiſſimus & literis *Collinii* admonitus, vix tandem invenit. *Newtonus* invenit per interpolationem Serierum, & poſtea diviſionibus & extractionibus radicum ut notioribus uſus eſt.

† Analyſin intelligit per Æquationes Infinitas ſupra impreſſam, de qua vid. pag. 1, 2, 3.

publici juris facerem. Et ante annos quinque [1671] cum ſuadentibus amicis conſilium ceperam edendi Tractatum de Refractione Lucis, & Coloribus, quem tunc in promptu habebam; cœpi de his Seriebus iterum cogitare; & ** Tractatum de iis etiam conſcripſi, ut utrumque ſimul ederem.

Sed, ex occaſione Teleſcopii Catadioptrici, Epiſtolâ ad te miſsâ qua breviter explicui conceptus meos de Natura Lucis, inopinatum quiddam effecit ut mei intereſſe ſentirem ad te feſtinanter ſcribere de Impreſſione iſtius Epiſtolæ. Et ſubortæ ſtatim per diverſorum Epiſtolas (Objectionibus aliiſque refertas) crebræ interpellationes me prorſus a conſilio deterruerunt; & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorſus ſubſtantialem.

Sub eo tempore *Jacobus Gregorius*, ex unica quadam Serie e meis quam D. *Collinius* ad eum tranſmiſerat, poſt multam conſiderationem (ut ad *Collinium* reſcripſit) pervenit ad eandem Methodum, & Tractatum de ea reliquit quem ſperamus ab Amicis ejus editum iri. Siquidem pro ingenio quo pollebat non potuit non adjicere de ſuo nova multa, quæ rei Mathematicæ intereſt ut non pereant.

Ipſe autem Tractatum meum non penitus abſolveram, ubi deſtiti a propoſito; neque in hunc diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars ea qua decreveram explicare modum ſolvendi Problemata, quæ ad Quadraturas reduci nequeunt; licet aliquid de Fundamentis ejus poſuiſſem. Cæterum in Tractatu iſto, Series Infinitæ non magnam partem obtinebant.

Alia haud pauca congeſſi, inter quæ erat Methodus ducendi Tangentes, quam ſolertiſſimus *Sluſius* ante annos duos treſve tecum communicavit; de qua tu (ſuggerente *Collinio*) reſcripſiſti eandem †† mihi etiam innotuiſſe. Diverſa ratione in eam incidimus. Nam res non eget Demonſtratione prout ego operor. Habito meo Fundamento nemo potuit Tangentes aliter ducere, niſi volens de recta via deviaret.

Quinetiam non hic hæretur ad Æquationes Radicalibus unam vel utramque Indefinitam Quantitatem involventibus utcunque affectas; ſed abſque aliqua talium Æquationum Reductione (quæ opus plerumque redderet immenſum) Tangens confeſtim ducitur. Et eodem modo ſe res habet in quæſtionibus de Maximis & Minimis; aliiſque quibuſdam, de quibus jam non loquor.

Funda-

** Hujus Tractatus meminit D. *Collins* in Epiſtolis duabus ſupra impreſſis, pag. 27, 28.

†† Vide Epiſtolam *Newtoni* ſupra impreſſam, pag. 29, 30.

Digitized by Google

Fundamentum harum Operationum, ſatis obvium quidem, (quoniam jam non poſſum Explicationem ejus proſequi,) ſic potius celavi * *6accdæ 13eff7i3l9n4o4qrr4ſ9t12vx.*

Hoc fundamento conatus ſum etiam reddere † ſpeculationes de Quadratura Curvarum ſimpliciores; pervenique ad Theoremata quædam generaliora. Et, ut candide agam, ecce primum Theorema.

Ad Curvam aliquam ſit $dz^{\theta} \times \overline{e + fz^{n}}|^{\lambda}$ Ordinatim-applicata, termino abſciſſæ ſeu baſis z normaliter inſiſtens: ubi literæ d, e, f denotant quaſlibet quantitates Datas; & θ, n, λ indices Poteſtatum ſive Dignitatum quantitatum quibus affixæ ſunt. Fac $\frac{\theta+1}{n} = r$, $\lambda + r = s$, $\frac{d}{nf} \times \overline{e + fz^{n}}|^{\lambda+1} = Q$, & $rn - n = \pi$: & Area Curvæ erit Q in $\frac{z^{\pi}}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{n}} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fz^{n}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^{n}} + \frac{r-4}{s-4} \times \frac{eD}{fz^{n}}$ &c. literis A, B, C, D &c. denotantibus terminos proxime antecedentes; nempe A terminum $\frac{z^{\pi}}{s}$, B terminum $- \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{n}}$ &c. Hæc Series, ubi r fractio eſt vel numerus negativus, continuatur in infinitum; ubi vero r integer eſt & affirmativus, continuatur ad tot terminos tantum quot ſunt Unitates in eodem r; & ſic exhibet Geometricam Quadraturam Curvæ. Rem Exemplis illuſtro.

Exemplum 1. Proponatur Parabola, cujus Ordinatim-applicata ſit $\sqrt{az}$. Hæc in formam Regulæ reducta fit $z^{0} \times \overline{0 + az^{1}}|^{\frac{1}{2}}$. Quare $d = 1$, $\theta = 0$, $e = 0$, $f = a$, $n = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$, $\pi = 0$. Et erit Area quæſita $\frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$; hoc eſt, $\frac{2}{3}z\sqrt{az}$. Et ſic in genere, ſi cz^{n} ponatur Ordinatim-applicata, prodibit Area $\frac{c}{n+1} z^{n+1}$.

Exempl. 2. Sit Ordinatim-applicata $\frac{a^{4}z}{c^{4} - 2cczz + z^{4}}$. Hæc per Reductionem fit $a^{4}z \times \overline{cc - zz}|^{-2}$; vel etiam $a^{4}z^{-3} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-2}$. In priori caſu

* Hoc eſt, *Data Æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire; & vice verſa.* Prior pars Problematis ſolvitur per Regulam Binomii initio Epiſtolæ ſuperioris *Newtonianæ* traditam & initio hujus demonſtratam. Nam ſi terminus ſecundus Binomii ſit momentum termini primi, terminus ſecundus Seriei, in quam dignitas Binomii per Regulam illam reſolvitur, erit momentum Dignitatis Binomii. Poſterior pars Problematis ſolvitur regrediendo a momentis ad fluentes: quod ubi hæretur fieri ſolet quadrando figuras; & ubi ad quadraturas hæretur, extrahendo fluentes per Regulas quatuor, quarum duas *Newtonus* in Epiſtola priore explicuit, duas alias ſub finem hujus Epiſtolæ literis tranſpoſitis occultavit, ut mox dicetur.

† Hujuſmodi Theoremata *Newtono* ante annum 1669 innotuiſſe patet, per Analyſin ſupra impreſſam pag. 18, lin. 31, ut & per hanc Epiſtolam.

Digitized by Google

caſu eſt $d = a^4$, $\theta = 1$, $e = cc$, $f = -1$, $n = 2$, $\lambda = -2$. Adeoque $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2} \times \overline{cc - zz}|^{-1}$, hoc eſt $-\frac{a^4}{2cc - 2zz}$, $\pi = 0$. Et Area Curvæ Q in $-\frac{z^0}{1}$, id eſt $= \frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In ſecundo autem caſu, eſt $d = a^4$, $\theta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $n = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2cc} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-1}$, id eſt $-\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\pi = 0$. Et Area $=$ Q in $-\frac{z^0}{1}$, hoc eſt $\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his caſibus diverſimode exhibetur, quatenus computatur, a diverſis finibus, quorum aſſignatio per hos inventos valores Arearum facilis eſt.

Exempl. 3. Sit Ordinatim-applicata $\frac{a^5}{z^5}\sqrt{bz + zz}$: hoc eſt, per Reductionem ad debitam formam; vel $a^5z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b + z}|^{\frac{1}{2}}$; vel $a^5z^{-4} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{1}{2}}$. Et erit, in priori caſu, $d = a^5$, $\theta = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $n = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = -\frac{7}{2}$, &c. Quare, cum r non ſit numerus affirmativus, procedo ad alterum caſum. Hic eſt $d = a^5$, $\theta = -4$, $e = 1$, $f = b$, $n = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoq; $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = -\frac{a^5}{b} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$, ſeu $-\frac{a^5z + a^5b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$, $\pi = -2$. Et Area, Q in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^0}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc eſt $\frac{-30bb + 24bz - 16zz}{105bbzz}$, in $\frac{a^5z + a^5b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$.

Exempl. 4. Sit denique Ordinatim-applicata $\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{5 : c^3 - 3accz^{\frac{2}{3}} + 3aacz^{\frac{4}{3}} - a^3zz}}$. Hæc ad formam Regulæ reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Indeque eſt $d = b$, $\theta = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $n = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = -\frac{3b}{2a} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$, $\pi = \frac{1}{3}$. Et Area $Q \times \frac{5z^{\frac{2}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times -\frac{5c}{7a}$, id eſt $-\frac{30abz^{\frac{2}{3}} + 75bc}{28aa} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$. Quod ſi res non ſucceſſiſſet in hoc caſu, exiſtente r vel fractione vel numero negativo; tunc tentaſſem alterum caſum, purgando terminum $-az^{\frac{2}{3}}$ in Ordinatim-applicata a Coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$; hoc eſt reducendo Ordinatim-applicatam ad hanc formam, $bz^{-\frac{1}{15}} \times \overline{-a + cz^{-\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Et ſi r in neutro caſu fuiſſet numerus integer & affirmativus, concluſiſſem Curvam ex earum numero eſſe quæ non poſſunt Geometrice quadrari. Nam, quantum animadverto, hæc Regula exhibet in infinitis Æquationibus Areas omnium Geometricam Quadraturam admittentium Curvarum, quarum Ordinatim-applicatæ conſtant ex Poteſtatibus, Radicibus,

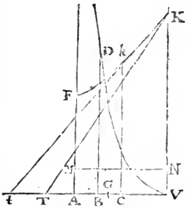
Digitized by Google

vel quibuſlibet Dignitatibus Binomii cujuſcunque: licet non directe, ubi index Dignitatis eſt numerus Integer.

At, quando hujuſmodi Curva aliqua non poteſt Geometrice quadrari; ſunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum Conicis Sectionibus, vel ſaltem cum aliis Figuris Simpliciſſimis quibuſcum poteſt comparari: ad quod ſufficit etiam hoc ipſum unicum jam deſcriptum Theorema, ſi debite concinnetur.

Pro Trinomiis etiam, & aliis quibuſdam, Regulas quaſdam concinnavi.

Sed in ſimplicioribus vulgoque celebratis Figuris, vix aliquid relatu dignum reperi quod evaſit aliorum conatus; niſi forte *Longitudo Ciſſoidis* ejuſmodi cenſeatur. Ea ſic conſtruitur.



Sit VD Ciſſois, AV Diameter Circuli ad quem aptatur, V Vertex, AF Aſymptota ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demiſſum. Cum ſemi-axe AF = AV, & ſemi-parametro AG = $\frac{2}{3}$ AV, deſcribatur Hyperbola F*k*K; & inter AB & AV ſumpta AC media proportionali, erigantur ad C & V perpendicula C*k*, VK Hyperbolæ occurrentia in *k* & K; Et agantur rectæ KT, *kt* tangentes Hyperbolam in eiſdem K & *k*, & occurrentes AV in T & *t*; & ad AV conſtituatur rectangulum AVNM æquale ſpatio TK*kt*. Et Ciſſoidis VD longitudo erit Sextupla altitudinis VN. Demonſtratio perbrevis eſt. Sed ad Infinitas Series redeo.

Quamvis multa reſtent inveſtiganda circa modos approximandi, & diverſa Serierum genera quæ poſſunt ad id conducere: tamen vix cum D. *Tſchürnhauſio* ſperaverim dari poſſe aut ſimpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi Quantitates ad hoc genus Serierum, de quo agimus, quam ſunt Diviſiones & Extractiones Radicum, quibus *Leibnitius* & ego utimur; Saltem non generaliora: quia pro Quadratura & Εὐθύνσει Curvarum ac ſimilibus, nullæ poſſunt dari Series ex hiſce ſimplicibus terminis Algebraicis (unicam tantum indefinitam Quantitatem involventibus) conſtantes, quas non licet hac Methodo colligere.

Nam non poſſunt eſſe plures convergentes Series ad idem determinandum, quam ſunt indefinitæ Quantitates, ex quarum Poteſtatibus Series conflentur: & ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate Seriem novi colligere; & idem credo *Leibnitio* in poteſtate eſſe.

Nam quamvis mea methodo liberum ſit eligere, pro conflanda Serie, quantitatem quamlibet indefinitam, a qua quæſitum dependeat; & methodus,

thodus, quam ipſe nobiſcum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum quibus opus commode deduci poteſt ad Fractiones; quæ per ſolam Diviſionem evadant Series Infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ Quantitates pro Seriebus conſtandis adhiberi poſſunt, per methodum iſtam qua affectæ Æquationes reſolvuntur, dummodo reſolvantur in propriis terminis; hoc eſt, conficiendo Seriem ex ſolis terminis quos æquatio involvit.

Præterea, non video cur dicatur his Diviſionibus & Extractionibus problemata reſolvi *per Accidens*: Siquidem hæ operationes eodem modo ſe habeant ad hoc genus Algebræ, ac vulgares Operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgo notam.

Quod autem ad ſimplicitatem methodi attinet; nolim Fractiones & Radicales abſque prævia Reductione ſemper reſolvi in Series Infinitas: Sed, ubi perplexæ quantitates occurrunt, tentandæ ſunt omnimodæ Reductiones; ſive fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas; ſive per methodum Tranſmutatoriam *Leibnitii*, aut alio quocunque modo qui occurrat. Et tunc Reſolutio in Series per Diviſionem & Extractionem opportune adhibebitur.

Hic autem præcipue nitendum eſt, ut Denominatores Fractionum, & Quantitates in Vinculo Radicum, reducantur ad quam pauciſſimas & minime compoſitas; & ad tales etiam quæ in Seriem abeunt citiſſime convergentem, etſi Radices neque convertantur in Fractiones neque deprimantur. Nam, per Regulam initio alterius Epiſtolæ, Extractio altiſſimarum Radicum æque ſimplex & facilis eſt ac Extractio Radicis Quadraticæ vel Diviſio: & Series quæ per Diviſionem eliciuntur ſolent minime omnium Convergere.

Hactenus de Seriebus unicam indefinitam Quantitatem involventibus locutus ſum. Sed poſſunt etiam, perſpecta Methodo, Series ex duabus vel pluribus aſſignatis Indefinitis Quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam beneficio ejuſdem methodi poſſunt Series ad omnes Figuras efformari, *Gregorianis* ad Circulum & Hyperbolam editis affines; hoc eſt, quarum ultimus terminus exhibebit quæſitam Aream. Sed calculum hic oneroſiorem nolim lubens ſubire.

Poſſunt denique Series ex terminis compoſitis eadem Methodo conſtitui. Quemadmodum, ſi ſit $\sqrt{aa - ax + \frac{x^3}{a}}$ Ordinatim-applicata Curvæ alicujus; pono $aa - ax = zz$, & ex Binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extracta Radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$ &c. Cujus Seriei omnes termini quadrari poſſunt per Theorema jam ante deſcriptum. Sed hæc minoris facio, quod ubi Series ſimplices non ſunt ſatis tractabiles, aliam nondum communicatam Methodum habeo, qua pro libitu acceditur ad quæſitum.

Ejus

Ejus fundamentum eſt commoda, expedita, generalis ſolutio hujus Problematis, *Curvam Geometricam deſcribere quæ per data quotcunque Puncta tranſibit.*

Docuit *Euclides* deſcriptionem Circuli per Tria data Puncta. Poteſt etiam Conica Sectio deſcribi per Quinque data Puncta: & Curva Trium Dimenſionum per Septem data Puncta; (adeo ut in poteſtate habeam deſcriptionem omnium Curvarum iſtius ordinis, quæ per Septem tantum puncta determinantur.) Hæc ſtatim Geometrice fiunt nullo Calculo interpoſito. Sed ſuperius Problema eſt alterius generis: & quamvis prima fronte intractabile videatur; tamen res aliter ſe habet. Eſt enim fere ex pulcherrimis quæ ſolvere deſiderem.

Seriei a D. *Leibnitio* pro Quadratura Conicarum Sectionum propoſitæ, affinia ſunt Theoremata quædam, quæ pro Comparatione Curvarum cum Conicis Sectionibus in Catalogum * dudum retuli.

Poſſum utique cum Sectionibus Conicis Geometrice comparare Curvas omnes (numero infinities infinitas,) quarum Ordinatim-applicatæ ſunt

$$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \ \&c.$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \ \&c.$$

$$\text{Aut} \quad \frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}} \quad \text{vel} \quad dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}} : \&c.$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}} \ \&c.$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}}}{g+hz^{n}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}}}{g+hz^{n}} \ \&c.$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{n-1}}{g+hz^{n}\times\sqrt{e+fz^{n}}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2n-1}}{g+hz^{n}\times\sqrt{e+fz^{n}}} \ \&c.$$

$$\text{Aut} \quad \frac{d}{z}\sqrt{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^{n}}} \quad \text{vel} \quad dz^{n-1}\times\sqrt{\frac{e+fz^{n}}{g+hz^{n}}} \ \&c.$$

Hic d, e, f, g ſignificant quaſvis datas Quantitates cum ſuis Signis $+$ & $-$ affectas; z Axem vel Baſem Curvæ; & n, $2n$, $\frac{1}{2}n-1$, $\frac{3}{2}n-1$, $n-1$, $2n-1$ Indices Poteſtatum vel Dignitatum z, ſive ſint Affirmativi vel Negativi, ſive Integri vel Fracti; & ſingula bina Theoremata ſunt duo primi termini Seriei in infinitum progredientis. In Tertio & Quarto,

* Ex his patet Propoſitiones *Newtoni* de Quadratura Curvarum diu ante annum 1676 inventas fuiſſe.

Quarto, $4eg$ debet eſſe non majus quam ff, niſi e & g ſint contrarii Signi. In cæteris nulla eſt limitatio. Horum aliqua (nempe, Secundum, Tertium, Quartum, Quintum, & Decimum-tertium) ex Areis duarum Conicarum Sectionum conjunctis conſtant. Alia quædam (ut Nonum, Decimum, & Duodecimum) ſunt aliter ſatis Compoſita. Et omnia quidem in continuatione Progreſſionum cito evadunt compoſitiſſima; adeo ut vix per Tranſmutationem figurarum, quibus *Jacobus Gregorius* & alii uſi ſunt, abſque ulteriori fundamento inveniri poſſe putem.

Ego quidem haud quicquam generale in his obtinere potui, antequam abſtraherem a contemplatione Figurarum, & rem totam ad ſimplicem conſiderationem ſolarum Ordinatim-applicatarum reducerem. Sed, cum hæc, & hiſce generaliora, ſint in poteſtate; non dubitabitur, credo, de Binomialibus longe facilioribus quæ in his continentur, & prodeunt ponendo literam aliquam e vel f vel $g = 0$; & $n = 1$ vel 2; etſi Series, in quas iſta reſolvantur, non poſuerim in Epiſtola priori, nedum forte computaverim; intentus, non in omnia particularia enumeranda, ſed in illuſtrandam Methodum per unam & alteram in ſingulis rerum generibus inſtantiam, quæ ad oſtendendam ejus generalitatem ſufficere videbatur.

Cæterum hæc Theoremata dant Series pluſquam uno modo. Nam primum ſi ponatur $f = 0$ & $n = 1$, evadit $\frac{d}{e+gzz}$; unde prodit Series nobis communicata. Sed ſi ponatur $2eg = ff$, & $n = 1$, inde tandem obtinemus hanc Seriem * $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ &c. pro longitudine Quadrantalis Arcus, cujus Chorda eſt Unitas: vel, quod perinde eſt, hanc $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255}$ &c. pro longitudine dimidii ejus. Et has forte, quia æque ſimplices ſunt ac alteræ, & magis convergunt, non repudiabitis.

Sed ego rem aliter æſtimo. Illud enim melius quod utilius eſt, & Problema minori labore ſolvit. Sic, quamvis hæc æquatio $x^3 - x = 1$ appareat ſimplicior hacce $yy - 2y\sqrt{4\frac{1}{2} - \sqrt{20}} = \sqrt{20}$; tamen in confeſſo eſt poſteriorem revera ſimpliciorem eſſe, propterea quod Radicem ejus y Geometra facilius eruit.

Et ob hanc rationem Series pro obtinendis Arcubus Circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendis Sectoribus Conicarum Sectionum, pro optimis habeo quæ componuntur ex poteſtatibus Sinuum.

Nam ſiquis vellet per ſimplex computum hujus Seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. colligere longitudinem Quadrantis ad Viginti figurarum loca

X decimalia,

* D. Vicecomes *Brounker* Hyperbolam per hanc Seriem $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \frac{1}{7\times 8}$ + &c. id eſt per hanc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} +$ &c. (conjunctis binis terminis) primus omnium quadravit. *Mercator* hanc Quadraturam aliter demonſtravit. *Gregorius* communicavit hanc Seriem pro Circulo $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. & *Newtonus* hanc $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} +$ &c.

decimalia, opus eſſet 5 000 000 000 terminis Seriei circiter; ad quorum Calculum Milleni Anni requirerentur. Et res tardius obtineretur per Tangentem 45 Graduum. Sed, adhibito Sinu recto 45 Graduum; Quinquaginta-quinque vel Sexaginta termini hujus Seriei $\sqrt{\tfrac{1}{2}} \times \overline{1 + \tfrac{1}{12} + \tfrac{3}{160} + \tfrac{5}{896}}$ &c. ſufficerent: quorum computatio Tribus, ut opinor, vel Quatuor Diebus abſolvi poſſet.

Et tamen hic non eſt optimus modus computandi totam Peripheriam. Nam Series ex ſinu recto 30 graduum, vel ſinu verſo 60 graduum conflata, multo citius dabit Arcum ſuum; cujus ſextuplum vel duodecuplum eſt tota Peripheria. Neque majori labore eruitur area totius Circuli ex ſegmento cujus Sagitta eſt quadrans diametri. Ejus Computi ſpecimen, ſiquidem ad manus eſt, viſum fuit apponere; & una adjungere Aream Hyperbolæ quæ eodem calculo prodit.

Poſito Axe tranſverſo $= 1$, & ſinu verſo ſeu ſegmenti Sagitta $= x$; erit Semi-ſegmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}$ &c. Hæc autem Series ſic in infinitum producitur, ſit $2x^{\frac{3}{2}} = a$. $\frac{ax}{2} = b$. $\frac{bx}{4} = c$. $\frac{3cx}{6} = d$. $\frac{5dx}{8} = e$. $\frac{7ex}{10} = f$. &c. Et erit Semi-ſegmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ &c. Eorumque ſemi-ſumma $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11} -$ &c. & ſemi-differentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13} +$ &c. His ita præparatis, ſuppono $x = \frac{1}{4}$, quadrantem nempe Axis; & prodit $a\,(= \frac{1}{4}) = 0.25$; $b\,(= \frac{ax}{2} = \frac{0.25}{1 \times 8}) = 0.03125$: $c\,(= \frac{bx}{4} = \frac{0.03125}{2 \times 8}) = 0.001953125$: $d\,(= \frac{3cx}{6} = \frac{0.001953125}{8}) = 0.000244140625$. Et ſic procedo uſque dum venero ad terminum depreſſiſſimum, qui poteſt ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11, &c. reſpective diviſos diſpono in duas Tabulas: Ambiguos cum primo in unam; & Negativos in aliam; & Addo ut hic vides,

0.0833333333333333	0.0002790178571429
62500000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	0.0002825719389575
1	
0.0896109885646618	

Tunc

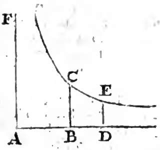
Tunc a priori ſumma aufero poſteriorem, & reſtat 0.0893284166257043 Area Semi-ſegmenti Hyperbolici. Addo etiam eas ſummas, & aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666, & reſtat 0.0767731061630473 Area Semi-ſegmenti Circularis. Huic addo Triangulum iſtud quo completur in Sectorem, hoc eſt $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, ſeu 0.0541265877365274, & habeo Sectorem 60 graduum, 0.1308996938995747, cujus ſextuplum 0.7853981633974482 eſt Area totius Circuli: Quæ diviſa per $\frac{1}{4}$ ſive quadrantem Diametri, dat totam Peripheriam 3.1415926535897928. Si alias artes adhibuiſſem, potui per eundem numerum terminorum Seriei perveniſſe ad multo plura loca figurarum, puta Viginti quinque aut amplius: Sed animus fuit hic oſtendere, quid per ſimplex Seriei computum præſtari poſſet. Quod ſane haud difficile eſt, cum in omni opere multiplicatores ac diviſores magna ex parte non majores quam 11, & nunquam majores quam 41 adhibere opus ſit.

Per Seriem *Leibnitii* etiam, ſi ultimo loco dimidium termini adjiciatur, & alia quædam ſimilia artificia adhibeantur, poteſt computum produci ad multas figuras. Ut & ponendo ſummam terminorum $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33}$ &c. eſſe ad totam Seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus uſus videtur eſſe, quando vel conjungitur cum duabus aliis perſimilibus & citiſſime convergentibus Seriebus; vel ſola adhibetur ad computandum arcum 30 graduum, poſita Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim Series illa evadit $1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 9} - \frac{1}{7 \times 27} + \frac{1}{9 \times 81}$ &c. quæ cito convergit. Vel, ſi conjunges cum aliis Seriebus, pone circuli Diametrum $= 1$, & $a = \frac{1}{2}$; & area totius circuli erit ſumma harum trium Serierum $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \frac{a^9}{9} - \frac{a^{11}}{11} +$ &c. $\frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11}$ &c. $\frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9}$ &c.

Hic conſideravimus Series quatenus adhibentur ad computandum totum Circulum. Sed quando computandæ ſunt partes ejus, tunc qualibet Series habet proprium uſum, & in ſuo genere optima eſt. Si datur Tangens ſatis parva vel ſatis magna, non recurrendum erit ad Sinum aliquem ut inde computetur Arcus, neque vice verſa. Series dato congruens eſt æquatio pro ſolvendo proprio Problemate.

Credo Cl. *Leibnitium*, dum poſuit Seriem pro determinatione Co-ſinus ex Arcu dato, vix animadvertiſſe Seriem meam pro determinatione Sinus Verſi ex eodem Arcu; ſiquidem hæc idem ſunt.

Neque obſervaſſe videtur morem meum generaliter uſurpandi literas pro quantitatibus cum Signis ſuis $+$ & $-$ affectis, dum dividit hanc Seriem $\frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} +$ &c. Nam cum Area Hyperbolica



lica BE, hic ſignificata per z, ſit affirmativa vel negativa. prout jaceat ex una vel altera parte Ordinatim-applicatæ BC ; ſi Area illa in numeris data ſit l, & l ſubſtituatur in Serie pro z, orietur vel $\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} + \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c. vel $-\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c ; prout l ſit affirmativa vel negativa. Hoc eſt, poſito $a = 1 = b$, & l logarithmo Hyperbolico ; numerus ei correſpondens erit $1 + \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ &c. ſi l ſit affirmativus ; & $1 - \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ &c. ſi l ſit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum, quæ alias in nimiam molem creſcerent. Nam v. g. illud unicum Theorema, quod ſupra poſui pro Quadratura Curvarum, reſolvendum eſſet in 32 Theoremata, ſi pro Signorum varietate multiplicaretur.

Præterea, quæ habet Vir Clariſſimus de Inventione Numeri Unitate majoris per datum Logarithmum Hyperbolicum, ope Seriei $\frac{l}{1} - \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} - \frac{l^4}{1\times2\times3\times4} +$ &c. potius quam ope Seriei $\frac{l}{1} + \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. nondum percipio. Nam ſi unus terminus adjiciatur amplius ad Seriem poſteriorem quam ad priorem, poſterior magis appropinquabit. Et certe minor eſt labor computare unam vel duas primas figuras adjecti hujus termini, quam dividere Unitatem per numerum prodeuntem ex Logarithmo Hyperbolico ad multa figurarum loca extenſum, ut inde habeatur numerus quæſitus Unitate major. Utraque igitur Series (ſi duas dicere fas ſit) officio ſuo fungatur. Poteſt tamen $\frac{l}{1} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ &c. Series, ex dimidia parte terminorum conſtans, optime adhiberi ; ſiquidem hæc dabit ſemi-differentiam duorum numerorum, ex qua & rectangulo dato uterque datur. Sic & ex Serie $1 + \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ &c. datur ſemiſumma numerorum, indeque etiam Numeri. Unde prodit relatio Serierum inter ſe, qua ex una data dabitur altera.

Theorema de inventione Arcus ex dato Co ſinu, ponendo Radium 1, Co-ſinum c, & Arcum $\sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$, minus appropinquat quam prima fronte videtur. Poſito quidem ſinu verſo v, error erit $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194} +$ &c. Poteſt fieri ut $120 - 27v$ ad $120 - 17v$, ita Chorda ($\sqrt{2v}$) ad Arcum ; & error erit tantum $\frac{61v^3\sqrt{2v}}{44800}$ circiter ; qui ſemper minor eſt quam $5\frac{1}{4}$

minuta

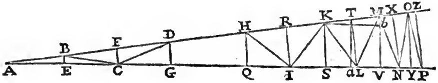
minuta ſecunda, dum arcus non ſit major quam 45 grad. Et ſingulis etiam biſectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1\times2\times3} - \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$ &c. applicari poſſet ad computationem tabulæ Segmentorum, ut obſervat Vir Clariſſimus. Sed res optime abſolvitur per Canonem Sinuum. Utpote, cognita Quadrantis Area, per continuam Additionem nonæ partis ejus habebis Sectores ad ſingulos Decem Gradus in Semicirculo: deinde per continuam Additionem decimæ partis hujus, habebis Sectores ad Gradus; & ſic ad decimas partes Graduum & ultra procedi poteſt. Tunc, radio exiſtente 1, ab unoquoque Sectore & ejus complemento ad 180 gradus, aufer dimidium communis Sinus Recti, & relinquentur Segmenta in Tabulam referenda. Cæterum quamvis Series hic non proſint, in aliis tamen locum obtinent. Et quoniam hoc ad earum uſum ſpectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Conſtructionem Logarithmorum non aliunde peti debere credetis forte, ex hoc ſimplici proceſſu qui ab iſtis pendet. Per methodum ſupra traditam quærantur Logarithmi Hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02: id quod fit ſpatio unius & alterius horæ. Dein diviſis Logarithmis quatuor poſteriorum per Logarithmum numeri 10, & addito Indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 98, 99, 100, 101, 102, in Tabulam referendi. Hi per dena intervalla interpolandi ſunt, & exibunt Logarithmi omnium numerorum inter 980 & 1020: & omnibus inter 980 & 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus conſtructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium Primorum Numerorum & eorum multiplicium, minorum quam 100: ad quod nihil requiritur præter Additionem & Subtractionem. Siquidem ſit $\sqrt[10]{\frac{9984\times1020}{9945}} = 2.$ $\sqrt[4]{\frac{8\times9963}{984}} = 3.$ $\frac{10}{2} = 5.$ $\sqrt{\frac{98}{2}} = 7.$ $\frac{99}{9} = 11.$ $\frac{1001}{7\times11} = 13.$ $\frac{102}{6} = 17.$ $\frac{988}{4\times13} = 19.$ $\frac{9936}{16\times27} = 23.$ $\frac{986}{2\times17} = 29.$ $\frac{992}{32} = 31.$ $\frac{999}{27} = 37.$ $\frac{984}{24} = 41.$ $\frac{989}{23} = 43.$ $\frac{987}{21} = 47.$ $\frac{9911}{11\times17} = 53.$ $\frac{9971}{13\times13} = 59.$ $\frac{9882}{2\times81} = 61.$ $\frac{9849}{3\times49} = 67.$ $\frac{994}{14} = 71.$ $\frac{9928}{8\times17} = 73.$ $\frac{9954}{7\times18} = 79.$ $\frac{996}{12} = 83.$ $\frac{9968}{7\times16} = 89.$ $\frac{9894}{6\times17} = 97.$ Et habitis ſic Logarithmis omnium numerorum minorum quam 100, reſtat tantum hos etiam ſemel atque iterum per dena intervalla interpolare.

Conſtructionis Tabulæ Sinuum, a qua pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum eſt continua Additio dati Anguli ad ſeipſum vel ad alium datum. Utpote in Angulo Addendo BAE; inſcribantur HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP, &c. æquales radio AB: & ad oppoſita latera

tera demittantur perpendiculares BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY, &c. Et Angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK, &c. differentiæ erunt Angulus A; Sinus HQ, IR, KS, &c; & Co-ſinus IQ, KR, LS, &c. Detur jam aliquis eorum LMK, & cæteri ſic eruentur. Ad SV & MV demitte perpendicula Ta & Kb; & (propter ſimilia Triangula ABE, TLa, KMb, ALT, AMV, &c.) erit AB . BE :: TL . La $\left(=\frac{SL-LV}{2}\right)$ :: KT $(=\frac{1}{2}KM)$. $\frac{1}{2}$Mb $\left(=\frac{MV-KS}{2}\right)$. Et AB . AE :: KT . S$a$ $\left(=\frac{SL+LV}{2}\right)$ :: TL . Ta $\left(=\frac{KS+MV}{2}\right)$. Unde dantur Sinus & Co-ſinus KS, MV, SL, LV.



Et ſimul patet ratio continuandi progreſſiones. Nempe AB . 2AE :: LV . TM+MX :: MX . VN+NY &c. :: MV . TL+XN :: XN . MV+OY &c. Vel AB . 2BE :: LV . XN — TL :: MV . TM — MX :: MX . OY — MV :: XN . VN — NY &c. Et retro AB . 2AE :: LS . KT + RK &c. Pone ergo AB = 1, & fac BE × TL = La. AE × KT = Sa. Sa — La = LV. $\overline{2AE \times LV}$ — TM = MX &c. Sed nodus eſt inventio Sinus & Co-ſinus Anguli A. Et hic ſubveniunt Series noſtræ. Utpote cognita ex ſuperioribus Quadrantalis Arcus longitudine 1.57079 &c; & ſimul Quadrato ejus 2.4694 &c; divide Quadratum hoc per Quadratum numeri exprimentis rationem 90 Graduum ad Angulum A: &, Quoto dicto z, tres vel quatuor termini hujus Seriei $1-\frac{z}{2}+\frac{zz}{24}-\frac{z^3}{720}+\frac{z^4}{40320}$ &c. dabunt Co-ſinum iſtius Anguli A. Sic primo quæri poteſt Angulus 5 Graduum, & inde Tabula computari ad Quinos Gradus; ac deinde interpolari ad Gradus vel dimidios gradus, per eandem Methodum. Nam non convenit progredi per nimios ſaltus. Duæ tertiæ partes Tabulæ ſic computatæ, dant reliquam tertiam partem, per Additionem vel Subtractionem, more noto. Siquidem poſito KT Co-ſinu 60 Graduum; fit AE = SV, & BE = Mb. Tunc ad decimas & centeſimas partes Graduum pergendum eſt per aliam Methodum; ſubſtitutis tamen prius Logarithmis Sinuum inventorum, ſi ejus generis Tabula deſideretur.

Ad computum Tabularum Aſtronomicarum *Kepleri*; poſui fundamentum aliquod in altera Epiſtola. Ejus Seriei tres primi termini & aliquando duo ſufficiunt. Sed ad diverſas partes Ellipſeos diverſæ ejuſmodi Series aptari debent. Vel potius tales Series computandæ ſunt, quæ ex

data

data Area Sectoris Elliptici BGE, immediate exhibeant aream Sectoris Circuli, cujus Angulus eſt BEG, Radius CB. Et habitis hiſce, computum earum ad duos, tres, aut forte quatuor terminos, beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quam ſolita Reſolutio tot Triangulorum in aliis Hypotheſibus: Imo forte minus grave, ſi Series prius debite concinnentur; ſiquidem unus Logarithmus e Tabula petitus determinet omnes iſtos terminos, addendo ipſum & ejus multiplices ad Logarithmos datarum Coefficientium in promptu habitos.

Quæ de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias tranſferri poſſunt, ubi ratiocinia Geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has Series computare triginta, vel viginti, aut forte pauciores terminos Tabulæ in debitis diſtantiis; ſiquidem termini intermedii facile interſeruntur per Methodum quandam, quam in uſum Calculatorum fere hic deſcripſiſſem. Sed pergo ad alia.

Quæ Cl. *Leibnitius* a me deſiderat explicanda, ex parte ſupra deſcripſi. Quod vero attinet ad Inventionem terminorum p, q, r, in Extractione Radicis Affectæ: primum p ſic eruo. Deſcripto Angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia parallelogramma vel quadrata,

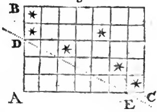
Fig. 1.

B

x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6
x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6
x^2	x^2y	x^2yy	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6
x	xy	xyy	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6
o	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6

A C

Fig. 2.



quæ concipio denominata eſſe a dimenſionibus duarum indefinitarum ſpecierum, puta x & y, regulariter aſcendentium a termino A; prout vides in Fig. 1. inſcriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; & x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus poteſtatibus Series conficienda eſt. Deinde, cum Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma ſingulis ejus terminis correſpondentia inſignio nota aliqua: & Regulâ ad duo vel forte plura ex inſignitis parallelogrammis applicatâ (quorum unum ſit humillimum in columna ſiniſtra juxta AB, & alia ad Regulam dextorſum ſita, cæteraque omnia non contingentia Regulam ſupra eam jaceant), Seligo terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam deſignatos, & inde quæro quantitatem Quotienti addendam.

Sic ad extrahendam Radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis reſpondentia ſigno nota aliqua

aliqua ✻; ut vides Fig. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem e locis ſignatis in ſiniſtra columna; eamque ab inferioribus ad ſuperiora dextrorſum gyrare facio, donec alium ſimiliter vel forte plura e reliquis ſignatis locis cœperit attingere. Videoque loca ſic attacta eſſe x^3, $xxyy$ & y^6. E terminis itaque $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& inſuper ſi placet reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum eſt.

† Sic Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam reſolvebam in priori Epiſtola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$ proxime: Cum itaque a ſit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & ſubſtituo $a + p = y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; ſed ex iis, credo, D. *Leibnitius* ſe proprio marte extricabit.) Subſequentes vero termini q, r, s, &c. eodem modo ex æquationibus ſecundis, tertiis, cæteriſque eruuntur, quo primus p è prima, ſed cura leviori; quia cæteri valores y ſolent prodire dividendo terminum involventem infimam poteſtatem indefinitæ quantitatis x per Coefficientem Radicis p, q, r aut s.

Intellexti credo ex ſuperioribus, Regreſſionem ab Areis Curvarum ad Lineas Rectas, fieri per hanc Extractionem Radicis Affectæ. Sed duo alii ſunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis eſt Computationibus quibus colligebam approximationes ſub finem alterius Epiſtolæ, & intelligi poteſt per hoc Exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Et partibus ejus multiplicatis in ſe, emerget $z^2 = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$ &c. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$ &c. $z^4 = x^4 + 2x^5$ &c. $z^5 = x^5$ &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}z^2$, & reſtat $z - \frac{1}{2}z^2 = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$ &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$ &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & reſtat $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$ &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quamproxime; ſive $x = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.

Eodem modo Series de una Indefinita Quantitate in aliam transferri poſſunt. Quemadmodum ſi poſito r Radio Circuli, x Sinu recto arcus z, & $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4}$ + &c. Longitudine arcus iſtius; atque hanc Seriem a Sinu recto ad Tangentem vellem transferre: Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4}$ + &c. Vocetur hæc quantitas t. Colligo poteſtates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$ &c. $t^5 = x^5$ + &c. Aufero autem t de z, & reſtat $z - t = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{10}$ &c.

† Hanc Reſolutionem vid. pag. 11.

Addo

Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$ quamproxime. Quare eſt $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. Sed ſiquis in uſus Trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem Arcus per Tangentem ; eam non hoc circuitu, ſed directa methodo quæſiviſſem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus conſtantes ; & Radices affectarum Æquationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potius Methodum in altera Epiſtola deſcriptam tanquam generaliorem, & (Regulis pro Eliſione ſuperfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

Pro Regreſſione vero ab Areis ad Lineas Rectas, & ſimilibus, poſſunt hujuſmodi Theoremata adhiberi.

Theorema 1. Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c. Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4 + \frac{3aacc - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5 +$ &c. Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ, $z = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ &c. Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e ; viciſſim exurgit, $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ &c.

Theorema 2. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 +$ &c. Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3bb - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aacc - a^3e}{a^{13}}z^9 +$ &c. Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Arcum Circuli, $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$ &c. Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d &c ; orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} +$ &c.

Alterum modum regrediendi ab Areis ad Lineas rectas celare ſtatui.

Ubi dixi, omnia pene Problemata ſolubilia exiſtere ; volui de iis præſertim intelligi circa quæ Mathematici ſe hactenus occuparunt, vel ſaltem in quibus Ratiocinia Mathematica locum aliquem obtinere poſſunt. Nam alia ſane adeo perplexis conditionibus implicata excogitare liceat, ut non ſatis comprehendere valeamus ; & multo minus tantarum computationum onus ſuſtinere quod iſta requirerent.

Attamen, ne nimium dixiſſe videar, inverſa de Tangentibus Problemata ſunt in poteſtate, aliaque illis difficiliora. Ad quæ ſolvenda uſus ſum duplici Methodo ; una concinniori, altera generaliori. Utramque viſum

 eſt

eſt impræſentia literis tranſpoſitis conſignare, ne propter alios idem obtinentes, inſtitutum in aliquibus mutare cogerer. * *5accdæ10effh12i4l3m10n6oqqr7s11t10v3x: 11ab3cdd10eæg10ill4m7n6o3p3q6r5ſ11t7vx, 3acæ4egh6i4l4m5n8oq4r3ſ6t4v, aaddæeeeeeiiimmnnooprrrsssssttuu.*

Inverſum hoc Problema de Tangentibus, quando Tangens inter punctum contactus & axem Figuræ eſt datæ longitudinis, non indiget his Methodis. Eſt tamen Curva illa Mechanica, cujus determinatio pendet ab Area Hyperbolæ.

Ejuſdem generis eſt etiam Problema, quando pars Axis inter Tangentem & Ordinatim-applicatam datur longitudine.

Sed hos caſus vix numeraverim inter ludos naturæ. Nam quando in Triangulo Rectangulo, quod ab illa Axis parte & Tangente ac Ordinatim-applicata conſtituitur, relatio duorum quorumlibet laterum per Æquationem quamlibet definitur, Problema ſolvi poteſt abſque mea Methodo Generali: Sed ubi pars Axis ad punctum aliquod poſitione datum terminata ingreditur Vinculum; tunc res aliter ſe habere ſolet.

Communicatio Reſolutionis Affectarum Æquationum per Methodum *Leibnitii*, pergrata erit; juxta & explicatio quomodo ſe gerat, ubi indices poteſtatum ſunt Fractiones; ut in hac Æquatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$; aut Surdæ Quantitates, ut in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}|^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$: ubi $\sqrt{2}$ & $\sqrt{7}$ non deſignant Coefficientes ipſius x, ſed indices Poteſtatum ſeu Dignitatum ejus; & $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ indicem Dignitatis Binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea methodo patet; aliter deſcripſiſſem.

Sed meta tandem prolixæ huic Epiſtolæ ponenda eſt. Literæ ſane Excellentiſſimi *Leibnitii* valde dignæ erant, quibus fuſius hoc Reſponſum darem. Et volui hac vice copioſior eſſe, quia credidi amœniora tua negotia ſeveriori hoc ſcribendi genere non debere a me crebro interpellari.

Tui Studioſiſſimus

Iſ. Newton.

* Id eſt, *Una Methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: altera tantum in aſſumptione Seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari poſſunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis, ad eruendos terminos aſſumptæ Seriei.* Analyſin per Fluentes & earum Momenta in æquationibus tam infinitis quam finitis, *Newtonus* in his Epiſtolis ad Regulas quatuor reduxit. Per primam extrahitur Fluens ex Binomiis, adeoque ex æquationibus quibuſcunque non affectis in Serie infinita, & Momentum fluentis ſimul prodit, quo evaneſcente Series in Æquationem finitam redit. Per ſecundam extrahitur Fluens ex æquationibus affectis Fluxionem non involventibus. Per tertiam extrahitur Fluens ex æquationibus affectis Fluxionem ſimul involventibus. Per quartam eruitur Fluens ex conditionibus Problematis. Regulæ duæ primæ in principio Epiſtolæ ſuperioris, duæ ultimæ in fine hujus ponuntur. Harum Regularum *Newtonum* eſſe inventorem primum nemo dubitat.

Digitized by Google

Exerpta ex Epiſtola D. Collins *ad D.* Newtonum, Londini 5 Martii 1677 *data. Integra autem extat impreſſa in Tomo tertio Operum D.* Walliſii *pag.* 646, *&c.*

Clariſſime Vir,

ADerat hic D. *Leibnitius* per unam Septimanam, in menſe *Octobris*; in reditu ſuo ad Ducem *Hanoveræ*; cujus literis revocatus erat, in ordine ad quandam Promotionem.

Dixit *Leibnitius*, ſe poſſe & velle conſilia impertire, pro obtinendis Seriebus, abſque Speocioſa Extractione Radicum Æquationum affectarum; modo quis velit laborem illum obire.

Et conſequenter ad hoc, (poſtquam ego D. *Bakerum* ipſi nominaveram,) literis ejus ad D. *Oldenburgium*, datis *Amſtelodami*, $\frac{18}{28}$ *Novemb.* 1676, hæc ſcribit.

'D. *Collinio* hæc quæſo communica. Dixit ille mihi D. *Bakerum*, doctum admodum & induſtrium apud vos Analyticum, utilibus conſiliis exequendis parem eſſe. Elegi ego unum præ reliquis utile & facile. Nimirum, Methodus Tangentium a *Sluſio* publicata nondum rei faſtigium tenet. Poteſt aliquid amplius præſtari in eo genere, quod maximi foret uſus ad omnis generis Problemata: Etiam ad meam (ſine extractionibus) Æquationum ad Series reductionem. Nimirum, Poſſet brevis quædam calculari circa Tangentes Tabula, eouſque continuanda, donec progreſſio Tabulæ apparet; ut eam ſcilicet quiſque, quouſque libuerit, ſine calculo continuare poſſit.

'*Amſtelodami* cum *Huddenio* locutus ſum; cui negotia civilia tempus omne eripiunt. Eſt enim ex numero 12 urbis Conſulum, qui ſubinde imperium obtinent: Nuper Conſul Regens erat; nunc Theſaurarii munus exercet. Præclara admodum in ejus Schedis ſupereſſe certum eſt. Methodus Tangentium a *Sluſio* publicata dudum illi fuit nota. Amplior ejus Methodus eſt, quam quæ a *Sluſio* fuit publicata. Sed & Quadratura Hyperbolæ *Mercatoris* ipſi jam Anno 1662 innotuit. Hactenus *Leibnitius*.

P. S. Exemplar Epiſtolæ tuæ (quatuor ſchedarum) nondum eſt ad D. *Leibnitium* miſſum: Sed, intra Septimanam, eſt quidam hinc profecturus *Hanoveram*, qui tum illud, tum libros quoſdam laturus eſt.

Epiſtola

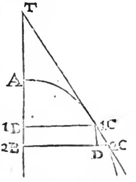
Epiſtola D. Leibnitii *ad* D. Oldenburgium, 21 Junii 1677, *data cum* D. Newtono *communicanda. Cujus extat exemplar manu* D. Collins *deſcriptum.*

Ampliſſime Domine,

ACcepi Literas tuas diu expectatas, cum incluſis *Newtonianis* ſane pulcherrimis; quas plus ſemel legam cum cura & meditatione; quibus certe non minus dignæ ſunt quam indigent. Nunc pauca quæ feſtinante oculo obeunti incidêre e veſtigio annotabo.

Egregie placet, quod deſcripſit qua via in nonnulla ſua elegantia ſane Theoremata inciderit. Et quæ de *Walliſianis* Interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hac ratione obtinetur harum Interpolationum Demonſtratio, cum res ea antea (quod ſciam) ſola Inductione niteretur; tametſi pars eorum per Tangentes ſit demonſtrata.

Clariſſimi *Sluſii* Methodum Tangentium nondum eſſe abſolutam Celeberrimo *Newtono* aſſentior. Et jam a multo tempore* rem Tangentium longe generalius tractavi; ſcilicet per differentias Ordinatarum. Nempe T 1B (intervallum Tangentis ab Ordinata in Axe ſumptum) eſt ad 1B 1C Ordinatam, ut 1CD (differentia duarum Abſciſſarum A 1B, A 2B,) ad D 2C (differentiam duarum Ordinatarum 1B 1C, 2B 2C.) Nec refert quem angulum faciunt Ordinatæ ad Axem. Unde patet, nihil aliud eſſe invenire Tangentes, quam invenire Differentias Ordinatarum, poſitis differentiis Abſciſſarum (ſeu 1B 2B = 1CD) ſi placet æqualibus. Hinc nominando † in poſterum, dy differentiam duarum proximarum y (nempe A 1B & A 2B;) & dx ſeu D 2C differentiam duarum proximarum x (prioris 1B 1C, poſterioris 2B 2C;) patet dy^2 eſſe $2ydy$; & dy^3 eſſe $3y^2dy$, &c. & ita porro. Nam ſint duæ proximæ ſibi (id eſt, differentiam habentes infinite parvam) ſcilicet A 1B $= y$; & A 2B $= y + dy$.



Quoniam

* Idem fecit D. *Barrow* in ejus Lect. 10, Anno 1669 impreſſa, idque calculo conſimili.

† Cœpit igitur D. *Leibnitius* hoc ipſo tempore Methodum differentialem cum amicis ſcripto communicare; lectis prius que *Newtonus* de hac Methodo in duabus Epiſtolis ſcripſerat, Lectis fortean & aliis *Newtonianis* ſub finem Anni 1676, ubi domum per *Londinum* redibat.

Quoniam ponimus $\mathrm{d}y^2$ eſſe differentiam quadratorum ab his duabus rectis, Æquatio erit $\mathrm{d}y^2 = y^2 + 2y\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\mathrm{d}y - y^2$. Seu, omiſſis $y^2 - y^2$ quæ ſe deſtruunt, item omiſſo quadrato quantitatis infinite parvæ (ob rationes ex Methodo de Maximis & Minimis notas,) erit $\mathrm{d}y^2 = 2y\mathrm{d}y$. * Idemque eſt de cæteris potentiis. Hinc etiam haberi poſſunt differentiæ quantitatum ex diverſis indefinitis in ſe invicem ductis factarum: ut $\mathrm{d}yx$ erit $= y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$; & $\mathrm{d}y^2x = 2xy\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$. Hinc ſi æquatio $a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2$ &c. $= 0$; ſtatim habetur Tangens Curvæ ad quam eſt iſta Æquatio. Nam ponendo $AB = y$, & $A2B = y + \mathrm{d}y$ (ſcilicet, quia $1B\,2B$ ſeu $1CD = \mathrm{d}y$;) Itemque ponendo $1B\,1C = x$, & $2B\,2C = x + \mathrm{d}x$ (ſcilicet, quia $2CD = \mathrm{d}x$,) Et quia eadem æquatio exprimit quoque relationem inter $A2B$ & $2B\,2C$, quæ eam exprimebat inter $A1B$ & $1B\,1C$; † Tunc in æquatione illa pro y & x ſubſtituendo $y + \mathrm{d}y$, & $x + \mathrm{d}x$, fiet

$$\left.\begin{array}{llllllll}
a + by & + cx & + dyx & + ey^2 & + fx^2 & + gy^2x & + hyx^2 & \&c. \\
\hline
 & b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}x & + dy\mathrm{d}x & + 2ey\mathrm{d}y & + 2fx\mathrm{d}x & + 2gxy\mathrm{d}y & + 2hxy\mathrm{d}x & \&c. \\
 & & + dx\mathrm{d}y & & & + gy^2\mathrm{d}x & + hx^2\mathrm{d}y & \&c. \\
\hline
 & & + d\mathrm{d}x\mathrm{d}y & + e\mathrm{d}y\mathrm{d}y & + f\mathrm{d}x\mathrm{d}x & + gx\mathrm{d}y\mathrm{d}y & + hy\mathrm{d}x\mathrm{d}x & \\
 & & & & & + 2gy\mathrm{d}y\mathrm{d}x & + 2hx\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \&c. \\
 & & & & & + g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y & + h\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}x &
\end{array}\right\} = 0.$$

d eſt quantitas communi more.
d eſt nota Differentiæ.

Ubi, abjectis illis quæ ſunt ſupra primam lineam, quippe nihilo æqualibus per æquationem præcedentem; & abjectis illis quæ ſunt infra ſecundam, quia in illis duæ infinite parvæ in ſe invicem ducuntur; hinc reſtabit tantum æquatio hæc $b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}x + dy\mathrm{d}x$ &c. $= 0$, quicquid ſcilicet re- $+ dx\mathrm{d}y$ peritur inter lineam primam & ſecundam. Et, mutata æquatione in rationem ſeu analogiam, fiet $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ \&c.}}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 \text{ \&c.}}$ Id eſt (quia $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ſeu $\frac{-1B\,2B, \text{ ſeu } -1CD}{D\,2C} = -\frac{T\,1B}{1B\,1C}$) erit $\frac{c + dy \text{ \&c.}}{b + dx \text{ \&c.}} = -\frac{T\,1B}{1B\,1C}$.

Quod coincidit cum Regula *Sluſiana*, oſtenditque eam ſtatim occurrere hanc Methodum intelligenti.

Sed Methodus ipſa (priore) noſtra longe eſt amplior. Non tantum enim exhiberi poteſt, cum plures ſunt literæ indeterminatæ quam y & x

* Id eſt, Si ſecundus terminus Binomii ſit differentia primi termini, ſecundus terminus potentiæ Binomii erit differentia potentiæ. Hoc eſt fundamentum Methodi differentialis a *Leibnitio* jam poſitum. Et hoc idem fundamentum Methodi ſuæ *Newtonus* Anno 1669 poſuerat in Analyſi ſupra impreſſa, pag. 19. Perſimilibus calculis *Newtonus* Momenta, & *Leibnitius* Differentias colligerunt, & diſcrepant ſolum in rerum nominibus.

† Calculus etiam in his Exemplis allatus a calculo *Newtoniano* in ſolis notarum formulis differt, ſed notis minus aptis obſcurior redditur.

(quod ſæpe ſit maximo cum fructu ;) Sed & tunc utilis eſt cum interveniunt irrationales, quippe quæ eam nullo morantur modo, neque ullo modo neceſſe eſt irrationales tolli, quod in Methodo *Sluſii* neceſſe eſt, & calculi difficultatem in immenſum auget.

Quod ut appareat, tantum utile erit in irrationalitatibus ſimplicioribus rem explanare. Et primum ſit in ſimpliciſſimis generaliter. Si ſit aliqua potentia aut radix x^z ; erit $dx^z = zx^{z-1}dx$.

Si z ſit $\frac{1}{2}$, ſeu ſi x^z ſit $\sqrt{x}$, erit dx^z, ſeu hoc loco $d\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ ſeu $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; ut notum aut facile demonſtrabile.

Sit jam Binomium, ut $\sqrt[3]{a + by + cy^2 \&c.}$ quæritur $d\sqrt[3]{a + by + cy^2 \&c.}$ ſeu dx^z, poſito $\frac{1}{3} = z$, & $a + by + cy^2$ &c. $= x$. Eſt autem $dx = bdy + 2cydy$ &c. Ergo dx^z ſeu $\frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{bdy + 2cydy \&c.}{3 \times \overline{a + by + cy^2 \&c.}|^{\frac{2}{3}}}$ Eadem Methodus adhiberi poteſt etſi Radices in Radicibus implicentur. Hinc ſi detur æquatio valde intricata, ut $a + bx\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{1+y}} + bx^2y\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} = 0$. ad aliquam Curvam cujus Abſciſſa ſit y (AB,) Ordinata x (BC,) tunc Æquatio proveniens utilis ad inveniendam Tangentem TC, ſtatim ſine calculo ſcribi poterit ; & erit hæc

$$bdx\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{1+y}} + \frac{bx}{2\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{1+y}}} \times \overline{2ydy + \frac{bdy}{3 \times \overline{1+y}|^{\frac{2}{3}}}} + \overline{bx^2dy + 2bxydx} \times \sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} + \frac{byx^2}{2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}}} \times \overline{2ydy + dy\sqrt{1-y} - \frac{ydy}{2\sqrt{1-y}}} = 0.$$

Seu, mutando Quotientem hanc inventam in Analogiam, erit $-dy$ ad dx, ſeu T 1B ad 1B 1C, ut omnes provenientis æquationis termini per dx multiplicati, ad omnes ejuſdem terminos per dy multiplicatos.

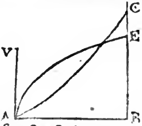
Ubi ſane mirum & maxime commodum evenit, quod dy & dx ſemper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem *Sluſiana* omnes ordine irrationales tollendas eſſe nemo non videt.

Arbitror, quæ celare voluit *Newtonus* de Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento * quadraturas quoque reddi faciliores, me in ſententia hac confirmat, nimirum ſemper figuræ illæ ſunt quadrabiles quæ ſunt ad Æquationem Differentialem, Æqua-

* Characteres Methodi *Newtoni Leibnitius* hic enumerat, & gaudet ſe in Methodum incidiſſe cui Characteres hi omnes competunt. Fatetur etiam *Newtonum* intellexiſſe facilem quadraturam Figurarum quæ ſunt ad Æquationem Differentialem. Vel doceat Methodum aliam in rerum natura extare cui Characteres hi omnes competunt, vel deſinat negare ſe in Methodum *Newtoni* incidiſſe.

Æquationem Differentialem voco talem qua valor ipſius dx exprimitur, quæque ex alia derivata eſt qua valor ipſius x exprimebatur. Exempli gratia; ſit $AB=y$. $EB=x$ ponatur $\dfrac{b+cy+dy^2+ey^3 \text{ \&c.}}{2\sqrt{1+by+\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{3}dy^3+\frac{1}{4}ey^4 \text{ \&c.}}}$

Quæritur Quadratura figuræ ABEA (quamquam forte ſæpe tale Trilineum non ſit prodit urum quale hoc ſchemate depinximus.) Deſcribatur alia Curva AC, talis ut BC [quæ] ſit $\sqrt{1+by+\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{3}dy^3+\frac{1}{4}ey^4 \text{ \&c.}}$ [ipſius Ordinatam] ſignificet ; & Rectangulum ſub recta AV repreſentante Unitatem conſtructionis, & ſub Ordinata nova BC, æquabitur figuræ ABEA. Ejuſmodi Theoremata condi poſſunt infinita : Imo pleraque ſub generaliſſimis quibuſdam complecti. Licet nihil refert ſive Series hæ producantur, ſive ubilibet finiantur. Unde patet hanc unicam Regulam pro infinitis figuris quadrandis inſervire, diverſæ plane naturæ ab iis quæ hactenus quadrari ſolebant.

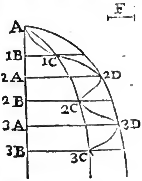


Pulcherrimæ ſunt illæ Series *Newtonianæ* quæ ex Infinitis in Finitas degenerant ; qualis illa eſt quam exhibet pro Extractione Radicum Binomii, aut ejus Quadratura. Quodſi in ipſius generali illa Æquationis Affectæ indefinitæ Extractione, cum ſit $x=ay+by^2+cy^3$ &c. et y ſit $\frac{z}{a}-\frac{bz^2}{a^3}$ &c. vel $y=\frac{z}{a}-\frac{bz^3}{a^4}$ &c : idem præſtari poſſet ; ut ſcilicet, inter extrahendum radices ex æquationibus aut binomiis, invenire liceret Radices rationales finitas quando eæ inſunt, vel etiam irrationales : Tunc dicerem Methodum Serierum infinitarum ad ſummam perfectionem eſſe perductam.

Opus eſſet tamen præterea, diſcerni poſſe varias æquationis ejuſmodi Radices : Item neceſſe eſſet, ope Serierum, diſcerni æquationes Poſſibiles ab Impoſſibilibus. Quodſi hæc nobis obtinuerit Vir in his ſtudiis maximus, atque effecerit ſcilicet ut poſſimus Seriem Infinitam convertere in Finitam quando id fieri poteſt, aut ſaltem agnoſcere ex quanam finita ſit deducta : Tunc in methodo Serierum Infinitarum, quæ Diviſione & Extractione inveniuntur, vix quicquam amplius optandum reſtabit. Hæc, ſi quiſquam mortalium, certe *Newtonus* præſtare poterit. Eadem credo opera efficietur, ut, ex multis Seriebus Infinitis, poſſimus deligere maxime naturales ; quales haud dubie illæ erunt, quæ ita erunt comparatæ, ut, cum fieri poteſt, atque opus eſt, degenerent in Finitas. Atque ita egregie apparebit Methodum Extractionum per Series Infinitas minime Indirectam, ſed maxime Naturalem eſſe.

Problema

Problema eſt perelegans cujus meminit, Curvam deſcribere quæ per data quæcunque tranſeat Puncta. *Huddenius* mihi *Amſtelodami* dixit, poſſe ſe Curvam deſcribere Analyticam, ſeu certa Æquatione uniformi conſtantem, quæ Faciei Hominis cujuſdam noti lineamenta deſignet.



Cæterum quærendum eſt, an hoc *Newtonus* intelligat de Punctis Infinitis; ut ſi ſit Axis A 1B 2A 2B 3A &c. in infinitum productus; & duæ curvæ datæ infinitæ Analyticæ, una A 1C 2C 3C &c, altera A 2D 3D &c; ſi ponamus A 1B, 1B 2A, 2A 2B, 2B 3A, &c. inter ſe & datæ cuidam quantitati F æquales; Quæritur an dari poſſit Curva Analytica, ſeu Æquationis capax, quæ in infinitum producta tranſeat (alternis) per puncta 1C, 2D, 2C, 3D, 3C, &c. *Fermatius* alicubi ſcribit, ſe Methodum habere per quam Curva inveniri poſſit, cujus proprietas ſpecifica data non pertineat ad unum Punctum, ut vulgo fit, cum Ordinatæ referuntur ad partes Axis; ſed ad duo quælibet ſimul, vel etiam ad tria quælibet ſimul, &c.

† Quæ de variis Seriebus ſuis & noſtris examinandis atque inter ſe comparandis dicit Clariſſimus *Newtonus*; in ea me immergere non audeo, antequam in gratiam cum Analyſi rediero: nam harum rerum veſtigia in animo meo prope nunc obliterata ſunt. Agnoſco interim pulcherrima & utiliſſima ab eo annotari. Elegantiſſima & minime expectata eſt via qua ſeriem meam $\frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ &c. deduxit ex ſua.

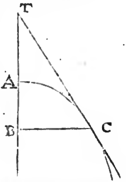
Quod ait, Problemata methodi Tangentium Inverſæ, eſſe in poteſtate; hoc arbitror ab eo intelligi per Series ſcilicet Infinitas: * Sed a me ita deſiderantur, ut Curvæ exhibeantur Geometrice quatenus id fieri poteſt, ſuppoſitis (minimum) Quadraturis. Exempli cauſa. Cycloidem deprehendit *Hugenius* ſui ipſius Evolutione deſcribi: Difficile autem fuiſſet, credo, ſolvere hoc Problema, Invenire Curvam quæ ſui ipſius Evolutione deſcribitur. Neque refert quod Curvæ Deſcriptio quadraturam Circuli ſupponit:

* Dixerat *Newtonus*, Analyſin beneficio æquationum infinitarum ad omnia pene Problemata ſeſe extendere (pag. 55, lin. penult.) Reſpondit *Leibnitius*; Multa eſſe *Problemata* uſque adeo mira & implexa ut neque ab æquationibus pendeant neque a quadraturis, qualia ſunt Problemata Methodi Tangentium inverſæ &c. pag. 65, lin. 15. Reſcripſit *Newtonus, inverſa de Tangentibus Problemata eſſe in poteſtate, aliaque illis difficiliora; ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe duplici Methodo* &c. pag. 85. *Leibnitius* vero ne quid a *Newtono* jam didiciſſe videretur, regerit ſolutionem a *Newtono intelligi per Series infinitas; ſed a ſe ita deſiderari ut Curvæ exhibeantur Geometricæ quatenus id fieri poteſt.* In priore Epiſtola negaverat Analyſin *Newtonianam* per Æquationes Infinitas ad hæc Problemata extendi. Jam negat ſe negaſſe, & verbis prioribus nubem obducit, quaſi inverſum illud Problema ſuo ſenſu non ſolveretur, niſi Curvæ exhibeantur Geometricæ quatenus id fieri poteſt, & Curva quæ ſui ipſius Evolutione deſcribitur inveniri poſſit per eandem ſolutionem.

† Vide pag. 42, lin. 7, 8; pag. 45, lin. 22 & ſeq.

ſupponit: Et hoc Problema etiam ex eorum eſt numero, quæ voco Methodi Tangentium Inverſæ. Ita inter Methodos Tangentium Inverſas generales eſt, Invenire Curvam Analyticam cujus Longitudines ſint Areis datæ Figuræ, Curvâ Analytica comprehenſæ, proportionales. Contrarium enim dudum poſſumus. Quod Problema arbitror non eſſe Inſolubile, & videtur non contemnendum: Facilius enim eſt Lineam quam Spatium organice metiri. Et, reducta Spatiorum dimenſione ad dimenſionem Linearum, ſolis Filis in rectum extenſis Mechanica fieri poterit Conſtructio; & Spatia poterunt in data ratione ſecari inſtar Linearum rectarum.

Cum ait *Newtonus*, inveſtigationem Curvæ, quando Tangens, vel Intervallum Tangentis & Ordinatæ in Axe ſumptum, eſt recta conſtans, non indigere his Methodis: innuit credo ſe intelligere Methodum Tangentium Inverſam generalem in poteſtate eſſe per Methodos Serierum appropinquativas; in hoc vero caſu ſpeciali * non opus eſſe Seriebus. Ego vero Methodum quærebam quæ accurate Curvam quæſitam exhibeat, ſaltem ex ſuppoſitis Quadraturis; & cujus ope ejus Æquationem, ſi quam habet, aut aliam primariam proprietatem poſſumus invenire.



Quod ait, Problemata in quibus datur relatio inter duo latera Trianguli TBC ſemper poſſe ſolvi. Id verum eſt; at ex † meis quoque artibus fluit; ac ſæpe, ne Quadraturis quidem accitis, ſimplici Analytica Æquatione præſtari poteſt. Ut, ſi BC poſita x, ſit $TB = bx + cx^2 + dx^3$, quæritur Qualiſnam ſit hæc Curva quæ hanc Tangentium habeat proprietatem: id eſt, Quænam ſit Æquatio relationem exprimens inter AB ſeu y, & BC ſeu x. Aio eam fore $y = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$. Si fuiſſet $TB = a + bx + cx^2$, opus fuiſſet Quadratura Hyperbolæ ad inveniendam Curvam quæſitam. Generaliter autem, quomodocunque datur relatio inter duo ex lateribus Trianguli,

* Hoc non dixit *Newtonus*, ſed perſpicue dixit Problema in hoc caſu non indigere Methodis duabus generalibus, quas literis tranſpoſitis celaverat, vide pag. 86.

† Per artes ſuas intelligit Methodum differentialem ut patet ex calculis quos ſubjungit. Ubi Epiſtolam priorem ſcribebat, Problema de Curva invenienda, in qua intervallum Tangentis & Ordinatæ in Axe ſumptum ſit recta conſtans, vocabat Ludum naturæ, & ejuſmodi Problemata mira & implexa ab æquationibus pendere noluit. Reſpondebat *Newtonus* hoc Problema non eſſe ludum naturæ, ſed ubi datur relatio quævis inter ordinatam, & tangentem, & intervallum utriuſque in Axe ſumptum, ſemper poſſe ſolvi, idque abſque ſua Methodo generali; nempe per Fluxionum methodum ſimplicem & Quadraturam Curvarum. Jam reſcribit *Leibnitius*, *Id verum eſſe, at ex ejus quoque artibus fluere*, (id eſt ejuſmodi Problemata ab æquationibus ſuis pendere) & triangulum TBC, *ob crebros uſus, Characteriſticum vocat*, quaſi hæc ipſi dudum innotuiſſent. Hujuſmodi problemata ab æquationibus non pendere anno ſuperiore ſcripſit: jam fluunt horum ſolutiones ex ejus artibus, ac ſæpe ne quadraturis quidem accitis; ſimplici analytica æquatione (differentiali ſcilicet) peraguntur.

Digitized by Google

(quod ego *Characteriſticum*, ob crebros uſus, vocare ſoleo) ſemper, ſuppoſitis Quadraturis Figurarum Analyticarum, haberi poteſt Curva quæſita. Quod tamen neſcio an præter *Newtonum* præſtiturus ſit quiſquam.

Mea Methodo, res unius lineolæ calculo peragitur ac demonſtratur. Sed & rem infinitis caſibus præſtare poſſum, tametſi ipſa y ſeu AB ingrediatur in ipſius TB expreſſionem. Ut, ſi ſit TB $= bx + cx^2 + dx^3 - y$, fiet Æquatio Curvæ $yx = bx + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{3}dx^2$. [*Forte legendum*, TB $= b + cx + dx^2 - y$, *fiet æquatio Curvæ*, $yx = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$.] Itaque ſi habeatur valor ipſius TA, ex BC haberi poterit Curva.

Quod vero ait Cl. *Newtonus* * non æque rem procedere ſi detur relatio ipſius TB ad partem axis, ſeu ad AB vel y, ad hoc reſpondeo; mihi æque facile eſſe invenire Curvæ naturam vel æquationem, ſi detur relatio ipſius TB ad AB, quam ſi, ut ipſe requirit, detur relatio ad BC. Generalem vero methodum Tangentium inverſam nondum quod ſciam habemus.

Sunt & alia Problematum genera quæ hactenus in poteſtate non habeo, quorum ecce exempla. Sint duæ æquationes $x^y + y^x = xy$, & $x^x + y^y = x + y$. Duæ ſunt incognitæ x, y, duæque ad eas inveniendas æquationes; quæritur valor tam unius quam alterius literæ. Talia Problemata vel in numeris vel in lineis ſolvere difficillimum arbitror; ſi tamen de appropinquationibus agatur, puto poſſe iis ſatisfieri. Si quam huic difficultati Lucem afferre poteſt *Newtonus*, pro ea qua pollet ingenii vi, multum Analyſim promovebit.

Analyſis quoque *Diophantæa*, ſeu ſolutio Problematum in numeris rationalibus nondum perfectionem nacta eſt.

Hæc annotavi feſtinans atque inter legendum; ad reliqua majore otio opus eſt: Interea celeberrimum *Newtonum* quæſo officioſiſſime a me ſaluta, & poſt actas maximas gratias eum roga, ut communicet continuationem harum Serierum; nempe poſita $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. ait fore $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5$ &c. Et ſi qua alia in promptu habet Theoremata nonnihil generalia; quoniam ad calculum contrahendum plurimum ſerviunt: quod ſi eorum originem ſive demonſtrationem addet, tanto magis obligabit. Velim etiam noſſe an per Extractiones in Seriebus diſcernere poſſit æquationes poſſibiles ab impoſſibilibus; nam ſi generalis ejuſmodi extractio procederet, ſequeretur nullam æquationem fore impoſſibilem: item quomodo inveniat diverſas

* Dixerat *Newtonus* quod ubi *relatio duorum quorumlibet laterum Trianguli definiretur per æquationem, Problema ſolvi poteſt abſque generali ejus Methodo quam literis tranſpoſitis celaverat, ſed ubi pars Axis vel Abſciſſæ ingreditur vinculum res aliter ſe habere ſolet*, id eſt, indiget ejus Methodo generali, præterquam in particularibus quibuſdam. *Leibnitius* ad particularia illa alludens *ſibi æque facile eſſe invenire Curvæ naturam vel æquationem in utroque caſu.* Quibus verbis manifeſtum eſt ſolutionem generalem ei nondum innotuiſſe.

Digitized by Google

verſas ejuſmodi æquationis radices, ita ut ex pluribus radicibus eam poſſit invenire quam quærimus: item an tales habeat Series quarum ope extrahendo æquationis inveniuntur valores finiti, quando tales inſunt æquatione: denique quid ſentiat de reſolutione æquationum quales paulo ante poſui, ut $x^y + y^z = xy$ & $x^x + y^y = x + y$; ubi ſcilicet incognita ingreditur in exponentem.

Oblitus eram dicere pulchram mihi videri Ciſſoidis extenſionem in rectam, quam *Newtonus* invenit, ex ſuppoſita Quadratura Hyperbolæ. Ego mihi videor eodem modo etiam metiri poſſe † curvam Hyperbolæ æquilateræ, ſed nondum omnis; neque curvam Ellipſeos quantum memini.

Antequam finiam adjiciam uſum pulcherrimum Serierum, qui imprimis *Collinio* noſtro non erit ingratus. Scis magnam eſſe difficultatem circa extrahendas radices ex binomiis Cubicis, quando eas ingreditur quantitas imaginaria, orta ex radice quadratica negativæ quantitatis; ut $\sqrt{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}}=\mathrm{M}+\sqrt{3}:\overline{a-\sqrt{-bb}}=\mathrm{N}$: ubi utraque quantitas M & N eſt ſingulatim impoſſibilis, ſumma autem, ut alibi oſtendi,* eſt quantitas poſſibilis & realis, æqualis cuidam quæſitæ z. Ut vero ea exematur, & ut extrahatur radix, nempe ut inveniatur $\frac{1}{2}z + e\sqrt{-bb} = \sqrt{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}}$, & $\frac{1}{2}z - e\sqrt{-bb} = \sqrt{3}:\overline{a-\sqrt{-bb}}$ (unde fit $\sqrt{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}} + \sqrt{3}:\overline{a-\sqrt{-bb}} = z$) non poteſt adhiberi Methodus *Schotenii* Geometriæ *Carteſianæ* ſubjecta, quia opus eſt ad eam ut valor ipſius $\sqrt{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}}$ exhibeatur ſaltem approximando, quod notis Methodis impoſſibile eſt. Quis enim valorem ipſius $\sqrt{-bb}$ prope verum dabit? neceſſe eſt enim invenire $b\sqrt{-1}$; quis autem exprimat $\sqrt{-1}$ appropinquando? Scripſi olim *Collinio* me remedium inveniſſe, quod etiam ad omnes gradus ſuperiores valeat: id ecce hic uno verbo. Ex Binomio $\sqrt{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}}$ extraho radicem per Seriem Infinitam, ſive per Theorema *Newtonianum*, ſive etiam more meo priore, inſtituendo calculum ſecundum naturam cujuſque gradus, cum ſcilicet nondum Theorema generale abſtraxiſſem: quæ radix ponatur eſſe $l + m\sqrt{-bb} + n + p\sqrt{-bb}$ &c. Extrahatur jam & radix ex Binomio altero $\sqrt{3}:\overline{a-\sqrt{-bb}}$, fiet illa $+ l - m\sqrt{-bb} + n - p\sqrt{-bb}$ &c. ut facile demonſtrari poteſt ex calculo: ergo ‡ addendo hæc duo extracta, deſtruentur imaginariæ quantitates, & fiet $z = 2l + 2n$ &c. quæ ſunt ex Seriei portiones in quibus nulla reperitur imaginaria. Invento ergo valore ipſius z quantum ſatis eſt propinquo, quemadmodum *Schotenius* poſtulat, reliqua methodo *Schoteniana*, perinde ac in aliis Binomiorum extrahendorum generibus, tranſigentur.

Junii 21. 1677.

† Rogatur D. *Leibnitius* ut hoc Theorema lucem tandem videat.
* Summa eſt quantitas triplex poſſibilis, ideoque non niſi tripliciter exhiberi poteſt.
‡ Examinanda eſt hæc Methodus.

Epiſtola D. Leibnitii *ad* D. Oldenburgum, 12 Julii 1677 *data, cum* D. Newtono *communicanda. Hujus extat exemplar manu* D. Collins *deſcriptum, & impreſſa eſt a* D. Wallifio *pag.* 652.

Ampliſſime Domine,

NUperas meas credo acceperis, nunc iſtas mature ſummitto, ne facilitate D. *Newtoni* abutamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quædam ſuæ Epiſtolæ loca explicaret; nempe quomodo inveniſſet Theoremata, quod poſito $z = ay + by^2 + cy^3$ &c. fit $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3$ &c. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5$ &c. Nunc vero, relectis ejus literis, video id facile non tantum ex ejus extractionibus derivari, ſed & altera illa methodo ſub finem literarum ejus expoſita inveniri, qua me quoque † aliquando uſum in veteribus meis Schedis reperio; ſed cum in exemplo, quod forte in manus meas ſumſeram, nihil prodiiſſet elegans, ſolita impatientiam eam porro adhibere neglexiſſe.

Difficultatem moveram in præcedentibus literis circa æquationes impoſſibiles, quarum radices poſſibiles videntur inveniri per Series Infinitas; necdum vero illa ſublata eſt, & meretur res exeuti diligentius: illud tamen video, ſi in æquatione data $z = ay + by^2 + cy^3$ &c. literæ z & y ſint indeterminatæ, tunc æquationem ſemper eſſe poſſibilem; ſed ſi z eſſet determinata, rurſuſque in ipſis a vel b &c. lateret æquatio, poſſet eſſe impoſſibilis, & tamen per Seriem generalem aliqua prodire videretur radix poſſibilis; cujus difficultatis ſolutionem, re diligenter expenſa, reperiri poſſe arbitror: ſed nunc in iſta accuratius inquirere non licet. Meretur autem explicari tum quomodo ex Seriebus agnoſci poſſit æquationes eſſe impoſſibiles (quanquam id alias ſatis facile inveniatur) tum quomodo dignoſcantur diverſæ radices.

Præter ea quæ in ſuperiore Epiſtola notavi, ſcilicet Methodum Tangentium inverſam & Geometricam (ſaltem ſuppoſitis Curvarum analyticarum quadraturis) & alia id genus, * deeſt nobis circa Quadraturas ut ſcire certo poſſimus, an non quadratura figuræ alicujus propoſitæ reducatur ad quadraturam Circuli aut Hyperbolæ: nam pleræque figuræ hactenus tracta-

tæ

† D. *Leibnitius* Series plures reciprocas ante biennium ab *Oldenburgo* acceperat, Methodum Serierum reciprocarum anno ſuperiore *Newtonum* rogaverat, hoc anno acceptam ægre intellexerat, & intellectam ſe olim inveniſſe ex chartis ſuis antiquis mox didicit: Et quamvis Series pro Hyperbola & Circulo ante annos plures haberet, & hæc methodus ex arcu daret Sinum, ex Logarithmo daret numerum, & Serierum omnium exhiberet reciprocas; eandem tamen olim inventam neglexiſſe ut inutilem. Sic Methodum, quam diu deſideraverat, rogaverat, acceperat & ægre intellexerat, vel primus vel ſaltem proprio marte ſcilicet invenit.

* Quod hic deſideratur, *Newtonus* in Epiſtola ſua noviſſima ſignificavit ſe aliqua ex parte inveniſſe, & quod invenerat poſtea publicavit in Libro de Quadratura Curvarum.

tæ ope alterutrius quadrari potuerunt. Quod ſi demonſtrari poteſt (ut arbitror) quaſdam figuras non eſſe quadrabiles nec per Circulum nec Hyperbolam, reſtat ut alias quaſdam figuras primarias altiores conſtituamus, ad quarum quadraturam reducantur cæteræ omnes, quando id fieri poteſt. Hoc quamdiu non fit hæremus, & ſæpe per Seriem infinitam particularem quærimus, quod ad Circuli aut Hyperbolæ aut aliam notioris figuræ quadraturam reduci poterat. Crediderat *Gregorius* dimenſionem Curvarum Hyperbolæ & Ellipſeos non pendere a quadratura Circuli aut Hyperbolæ; ego vero reperi aliquam ſpeciem Curvæ Hyperbolicæ quam ex data ipſius Hyperbolæ quadratura metiri poſſum: de cæteris nondum mihi liquet.

Hannoveræ 12 *Julii* 1677.

B*REVI poſtea, Autumno ſcilicet anni* 1677, *mors* Oldenburgi *huic literarum Commercio finem impoſuit. Deinde anno* 1682 *Acta eruditorum* Lipſiæ *primum edita ſunt, ejuſque anni Menſe* Februario *prodiit D.* Leibnitii Quadratura Arithmetica *Circuli ſcilicet & Hyperbolæ, quarum prior non differt a* Gregoriana *toties dicta, neque poſterior ab ea Vicecomitis* Brounkeri, *ante quatuordecim annos, in* Philoſophicis Tranſactionibus *N°.* 34 *pro menſe* Aprilis 1668, *publicata. Non multo poſt, anno ſcilicet* 1684, *in iiſdem Actis* Lipſicis *pro menſe* Octobri, Calculi differentialis *Elementa primum edidit D.* Leibnitius *literis* G. G. L. *deſignatus. Anno autem* 1683 *ad finem vergente, D* Newtonus *Propoſitiones principales earum quæ in* Philoſophiæ Principiis Mathematicis *habentur* Londinum *miſit, eademq; cum* Societate Regia *mox communicatæ ſunt; annoque* 1686 *Liber ille ad Societatem miſſus eſt ut imprimeretur, proximoque anno lucem vidit: & Exemplar ejus D.* Nicolao Fatio *datum eſt ut ad* Leibnitium *mitteretur. Deinde anno* 1688 *Epitome ejus in* Actis Lipſicis *impreſſa eſt: qua lecta D.* Leibnitius *Epiſtolam de lineis Opticis, Schediaſma de reſiſtentia Medii & motu Projectilium gravium in Medio reſiſtente, & Tentamen de Motuum Cœleſtium cauſis compoſuit, & in* Actis Lipſicis *ineunte anno* 1689 *imprimi curavit, quaſi* * *ipſe quoque præcipuas* Newtoni *de his rebus Propoſitiones inveniſſet, idque diverſa methodo qua vias novas Geometricas aperuiſſet; & librum* Newtoni *tamen nondum vidiſſet.*

* Hac licentia conceſſa authores quilibet inventis ſuis facile privari poſſunt. Viderat *Leibnitius* Epitomen Libri in *Actis Lipſicis.* Per commercium Epiſtolicum, quod cum Viris doctis paſſim habebat, cognoſcere potuit Propoſitiones in libro illo contentas. Si librum non vidiſſet, videre tamen debuiſſet antequam ſuas de iiſdem rebus in itinere ſcriptas compoſitiones publicaret. Dicunt aliqui falſas eſſe Tentaminis Propoſitiones 11, 12 & 15, & D. *Leibnitium* ab his per calculum ſuum deduxiſſe Propoſitiones 19 & 20 ejuſdem Tentaminis. Talis autem calculus ad Propoſitiones prius inventas aptari quidem potuit, non autem inventorem conſtituere.

Anno

Digitized by Google

Anno autem 1695 *Opera Mathematica Celeberrimi* Walliſii *duobus Tomis* Oxonii *prodiere : & in Actis Eruditorum anni inſequentis Menſe* Junio, *habetur libri Epitome ; in qua ſequentia leguntur, pag.* 257 *& ſeq.*

NEwtonianis *etiam ſeriebus jam in Anglicana editione expoſitis, adjicit quædam quæ* David Gregorius *Scotus Profeſſor* Oxonienſis, *&* Archibaldus Pitcarnius *Medicinæ* Lugduni Batavorum *Profeſſor, non abludentia attulerunt. Addit cap* 95 *Algebræ pag.* 389 *apud exteros (ut verba ejus ſonant) etiam* Leibnitium *&* Tſchürnhauſium *nonnihil ejuſmodi præſtitiſſe, & apud* Britannos Jacobum Gregorium *&* Nicolaum Mercatorem, *ſed quæ ſint ut plurimum nonniſi caſus particulares intra ambitum generalem regularum* Newtoni. *Calculo quoque Differentiali* Leibnitii *affinem eſſe methodum Fluxionum* Newtoni *in Principiis Naturæ Mathematicis primum editam) tum utraque eſſe antiquiorem* Barrovii ; *& omnes* Walliſianæ *Arithmeticæ Infinitorum ſuperſtrui, quæ* Cavallerii *Geometriam promovit, ut hic* Archimedeam. *Exhibet etiam Methodum quandam* Joſephi Raphſon *pro Infinitis Seriebus, libello* Londini 1690 *edito ſub titulo Analyſeos Æquationum univerſalis comprehenſam. Cæterum ipſe* Newtonus *non minus candore quam præclaris in rem Mathematicam meritis inſignis,* * *publice & privatim agnovit,* Leibnitium *tum cum (interveniente celeberrimo Viro* Henrico Oldenburgo *Bremenſi,* Societatis Regiæ Anglicanæ *tunc Secretario) inter ipſos (ejuſdem jam tum Societatis Socios) commercium intercederet, id eſt jam fere ante annos viginti & amplius, Calculum ſuum Differentialem, Serieſque Infinitas & pro iis quoque Methodos generales habuiſſe ; quod* Walliſius, *in præfatione Operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit, quoniam de eo fortaſſe non ſatis ipſi conſtabat. Cæterum Differentiarum conſideratio* Leibnitiana, *cujus mentionem facit* Walliſius *(ne quis ſcilicet, ut ipſe ait, cauſaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipſo dictum fuiſſe) meditationes aperuit, quæ aliunde*

unde

* Methodum Differentialem *Moutoni* D. *Leibnitius* habuit anno 1673, & ſuam eſſe voluit : Methodum aliam Differentialem nondum habuit. Series poſtea habuit, ſed quas anno 1675 ab *Oldenburgo* accepit, ab aliis prius accipere potuiſſet. Methodum generalem perveniendi ad ejuſmodi Series anno proximo ab *Oldenburgo* petiit, a *Newtono* accepit, antea non habuit. Methodum extrahendi Radices in ſpeciebus a *Newtono* ſimul accepit, qua Methodus ejus per Tranſmutationem figurarum nondum generalis, in Methodum quandam generalem evaſit, ſed inutilem : Per Extractiones ſolas res citius peragitur. Anno 1677 Methodum novam Differentialem habuit, ac tantam Methodi hujus antiquitatem Editores jactant, majorem non aſſeruit. Methodum generalem vel Serierum vel Differentialem, *Leibnitium* vel primum vel proprio marte inveniſſe *Newtonus* nondum agnovit publice.

unde non æque naſcebantur. Eſt enim Differentia Analyticum quiddam & calculi capax, & quod rei caput eſt, Summæ reciprocum. Eaque demum ratione factum eſt, ut calculus Analyticus non minus in Geometria altiore, quam Carteſius *a ſuo calculo excluſerat, quam in ordinaria ab ipſo tractata procedat. Et quemadmodum* Apollonius *& alii Veteres habebant quidem proprietates ordinatarum pro lineis Conicis & aliis, ex quibus formatæ ſunt poſtea æquationes a* Carteſio ; *ita ſimiliter lineæ, quas ipſe* Carteſius, *quippe calculo ſuo intractabiles, a Geometria excluſerat,* Leibnitiana *primum methodo æquationibus finitis ſunt expreſſæ & ſub leges Analyſeos redactæ ; qua ratione omnes earum proprietates Analytico jam calculo inveſtigari poſſunt, prorſus ut in ordinariis. Et cum antea per viam figurarum & imaginationis etiam præſtantiſſimi Geometræ faciliora tantum aſſequi in his potuerint, nunc ope hujus calculi non tantum priora illa primo velut obtutu patent, quæ tunc merito admirationi erant, ſed & multo magis abſtruſa deteguntur ad quæ imaginatio non pertingit, in quo conſiſtit potiſſimus calculi Analytici uſus. Cæterum ipſum celeberrimum* Walliſium, *quo eſt candore, non dubitamus etiam Noſtratium meditationibus, ſi ſufficientem earum habuiſſet notitiam, locum ampliorem in ſuo Opere daturum fuiſſe. Sed ipſe queritur, ultima Algebræ ſuæ pagina, hæc noſtra Eruditorum Acta, in quibus bona earum pars continetur, minus ſibi fuiſſe viſa : unde neque illa ſatis ſibi cognita ait, quæ de Geometria Incomparabilium, vel Analyſi Infinitorum, a* Leibnitio *data fuere, quæ libenter alioqui in ſuo quoque opere exhibiturus fuerit. Cæterum hac occaſione & de* Nicolao Mercatore, *(quem* Walliſius *velut inter ſuos recenſere videtur) notare voluimus,* Germanum *fuiſſe, & ex* Holſatia *oriundum, etſi in* Angliam *habitatum conceſſerit ; eumque primum fuiſſe, quantum conſtet, qui Quadraturam publice dederit per Seriem infinitam, tametſi tunc quoque* Newtonus *in eadem ipſo inſcio incidiſſet, eaque multo longius produxiſſet.*

Excerpta ex Epiſtola D. J. Walliſii *ad D.* Leibnitium, Oxonii 1°. *Decemb.* 1696 *data, qua reſpondetur ad ea quæ ex Actis Eruditorum modo deſcripſimus.*

DUM hæc ſcripturus eram ; oſtendit mihi non-nemo, heſterno die, *Acta Lipſica*, pro Menſe *Junii* præſentis Anni 1696. Quorum Eruditus Editor dignatus eſt inibi amplam meorum Operum Mathematicorum (*Oxonii* editorum) mentionem facere. Quo nomine me ipſi obſtrictum ſentio, & gratias habeo.

Sed conqueri videtur (ſaltem ſubinſinuare) quod, quum *Newtoni* Methodos fuſius expoſuerim ; de *Leibnitianis* parcius dixerim. At nolim ego Te (quem magni æſtimo) a me quoquo modo læſum iri. Sed gratulor

tulor potius, Te, in tanta nobilitate poſitum, ad res noſtras Mathematicas deſcendere voluiſſe. Et tantum abeſt ut velim ego Tibi quocunque modo iniquus eſſe, ut ſiqua ferat occaſio, demerere malim.

Dum addit Eruditus Editor, Illas me forte præteriiſſe quod de illis mihi non ſatis conſtiterit; id omnino verum eſt.

Dicam utique quod res eſt (neque enim fateri pudet:) Tuarum ego rerum nihil (quod memini) vidi quicquam, præter hæc duo. Quorum alterum, illud eſt quod inter *Londinenſium Collectiones Philoſophicas* habetur (ſed abſque Demonſtratione) ex *Actis Lipſicis* deſcriptum; De *Quadrato Diametri ad Aream Circuli*; ut 1 ad $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ &c. in infinitum. Quod ego meis inſerui (ut a * Te factum) ad Algebræ meæ Prop. 95.

Alterum eſt illud de *Teſtudine Quadrabili*; cujus ego (ut de Tuo) mentionem facio in Algebræ meæ poſtremo folio. Præter hæc duo, ſi plura noverim, non reticuiſſem.

Tuam *Geometriam Incomparabilium* vel *Analyſin Infinitorum*, (quam ibidem a te memoratam dixi,) ego nondum vidi; nec ejus quicquam vel de nomine ante inaudiveram, quam prout ibidem ad calcem Algebræ dictum eſt.

Neque *Calculi Differentialis* vel Nomen audiviſſe me memini, niſi poſtquam utrumque Volumen abſolverant operæ, eratque Præfationis (præfigendæ) poſtremum folium ſub Prelo, ejuſque typos jam poſuerant Typothetæ. Quippe tum me monuit amicus quidam (harum rerum gnarus) qui peregre fuerat, tum talem methodum in *Belgio* prædicari, tum illam cum *Newtoni* methodo Fluxionum quaſi coincidere. Quod fecit ut (tranſmotis typis jam poſitis) id monitum interſeruerim.

Sed & ante monueram, Algebræ Prop. 95. pag. 389. (quod ſolum potui) *Leibnitium* & *Tſchürnhauſium* talia meditatos; ſed quæ ego non videram. (Necdum vidi.) Et ſicubi forte viderim literas *G. G. L.* neſciebam quem illæ Virum indicabant.

Extant, credo, plura in *Actis Lipſicis*; ſed quæ ego non vidi: Uti nec tu, credo, vidiſti *Brounkeri Quadraturam Hyperbolæ*, quæ extat in Tranſactionibus *Londinenſibus*. Mihique condonari poteſt, hac ætate, (qui annum Octogeſimum ſuperavi) ſi non omnia ſciſcitarer.

Noveram quidem jamdudum (& indicavi) de rebus hujuſmodi nonnulla te meditatum eſſe; tibique cum *Newtono* (mediante *Oldenburgo*) interceſſiſſe Literas quaſdam tuas: Sed, quas ego non vidi, nec ſcio quales fuerint: eratque *Oldenburgus* diu mortuus, ut non potuerim ab illo ſciſcitari.

* Ignoravit *Walliſius Gregorium* hanc Seriem anno 1671 cum *Collinio*, *Oldenburgum* anno 1675 cum *Leibnitio* communicaſſe; & præterea *Leibnitium* in *Anglia* fuiſſe anno 1673. *Collinius* enim, *Leibnitio* tum non ignotus, ab anno 1670 Series a *Newtono* & *Gregorio* acceptas rogatus non rogatus liberrime nec ſine jactantia communicavit, ut ex ſuperioribus patet.

Digitized by Google

tari. Rogabam quidem (per literas) *Newtonum* noſtrum, ut ſi eas penes ſe haberet, earum mihi copiam faceret literarum ; ſed retulit ille, ſe non habere. (Et quidem periiſſe credo flammis inopinato correptas, cum pluribus *Newtoni* ſcriptis meliori luce dignis : & niſi per me ſtetiſſet, periiſſent etiam *Newtoni* literæ.) Eoque animo rogabam, ut tuas illas cum *Newtoni* literis junctim ederem. Idque etiamnum, ſi ferat occaſio, facturus forte ſum, modo mihi dignaberis earum copiam facere.*

Quod *Henricus Oldenburgus* fuerit *Bremenſis* ; & *Nicolaus Mercator Holſatus* ; (quod ſuggerit Eruditus Editor) omnino verum eſſe credo ; ſaltem Anglos non fuiſſe ſatis novi, (eoſque propterea *Germaniæ* veſtræ non invideo) Adeoque non *Noſtrates* dixi, ſed *Apud Nos :* nec tamen ideo minus eos aut amavi, aut æſtimavi. Nam mihi perinde eſt qua quis gente ſit *(Tros Tyriuſve foret, nullo diſcrimine)* modo ſit vir bonus & bene meritus. Sed *apud Nos* diu vixerant ; & quicquid hac in re fecerint, *apud Nos* factum eſt.

Quæ fuſius expoſui, ut ſentias quam Tibi non iniquus fuerim, aut parum candidus.

* Eas tandem obtinuit D. *Walliſius* e ſchediaſmatis *Collinii*.

Ex Epiſtola D. Leibnitii *ad* Walliſium *ſcripta,* $\frac{19}{29}$ *Martii, ineuntis Anni* 1697.

—— Quoniam videris nonnulla, in Actis dicta, ita accepiſſe, quaſi animi parum erga *Germanos* æqui accuſeris, & quaſi viciſſim tua recenſendo extenuentur : Putavi non ingratum Tibi fore, ſi Epiſtolam Dominis Editoribus Actorum ſcriberem (cujus hic Exemplum addo ;) qua (ſi ipſis videretur) Actis iiſdem inſerta, ſatisfieri tibi, ſcrupulis illis ſublatis, poſſit. [*Habetur in Actis Lipſicis pro menſe Junio* 1697.]

Ego qui Te magni facio, & publice profeſſus ſum quantum meo judicio Tibi debeat altior Geometria, æquiſſimum puto viris præclare, non de ſuo tantum ſeculo ſed & poſteritate, meritis debitas gratias rependi. Ut autem animi mei certior eſſe poſſis, ecce verbo tenus tranſcripta quæ ipſe de Tuis meritis Geometricis dixi, *Actorum Lipſienſium Menſe Junio* 1686, *pag.* 298.

" Paucis dicam, quid potiſſimum inſignibus noſtri ſeculi Mathematicis " in hoc Geometriæ genere mea ſententia debeatur.

" Primum *Galilæus* & *Cavallerius* involutiſſimas *Cononis* & *Archimedis* " artes detegere cœperunt.

" Sed *Geometria Indiviſibilium Cavallerii* Scientiæ renaſcentis non niſi " Infantia fuit. Majora ſubſidia attulerunt Triumviri celebres ; *Fermatius*, inventa methodo de *Maximis & Minimis : Carteſius*, oſtenſa ratione

 " Lineas

" Lineas Geometriæ communis (Tranſcendentes enim excluſit) exprimen-
" di per *Æquationes*: Et P. *Gregorius a S. Vincentio*, multis præclaris In-
" ventis. Quibus egregiam *Guldini* Regulam de *Motu Centri Gravitatis*
" addo.

" Sed & hi intra certos limites conſtitere; quos tranſgreſſi ſunt *Huge-*
" *nius* & *Walliſius*, Geometria inclyti. Satis enim probabile eſt *Hugeniana*
" *Heuratio*, & *Walliſiana Nelio* & *Wrennio* (qui primi Curvis æquales Rectas
" demonſtravere) pulcherrimorum inventorum occaſionem dediſſe. Quod
" tamen meritiſſimæ laudi Inventionum nihil detrahit.

" Secuti ſunt hos *Jacobus Gregorius Scotus* & *Iſaacus Barrovius Anglus*:
" qui præclaris in hoc genere Theorematibus ſcientiam mirifice locuple-
" tarunt.

" Interea *Nicolaus Mercator Holſatus*, Mathematicus & ipſe præſtantiſſi-
" mus, * primus (quod ſciam) Quadraturam aliquam dedit per *Seriem In-*
" *finitam*.

" At idem inventum non ſuo tantum Marte aſſecutus eſt, ſed & uni-
" verſali quadam ratione abſolvit, profundiſſimi ingenii Geometra *Iſaacus*
" *Newtonus*. Qui, ſi ſua cogitata ederet, quæ illum adhuc premere in-
" telligo, haud dubie nobis novos aditus ad magna Scientiæ incrementa
" compendiaque aperiret.

Quibus deinde nonnihil de iis addo, † quæ mea opera acceſſere; Præ-
ſertim dum novo Calculi genere effeci ut etiam Algebram tranſcendentia Analyſi ſubjiciantur; & Curvas, quas *Carteſius* a Geometria male excluſerat, ſuis quibuſdam ** Æquationibus explicare docui. Unde omnes earum proprietates certo calculi filo deduci poſſunt. Exemplo *Cycloidis*, cui Æquationem ibidem aſſigno, $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$. Ubi $\int$ ſignificat Summationem; & d, Differentiationem; x, Abſciſſam ex Axe inde a Vertice; & y, Ordinatam normalem.

De Te autem queri nunquam mihi in mentem venit; quem facile apparet noſtra, in *Actis Lipſienſibus* prodita, non ſatis vidiſſe.

Quæ inter *Oldenburgum* & me commutatæ ſunt Literæ, quibus aliqua acceſſerant a D. *Newtono* excellentis ingenii Viro, variis meis itineribus & negotiis ab hoc ſtudiorum genere plane diverſis, vel periere ut alia multa

* *Mercator* quadraturam D. *Brounkeri* per diviſionem *Walliſianam* tantum demonſtravit ut ſupra.

† *Leibnitius* recitando inventa nova Mathematica, prætermittit Methodum Fluxionum, quaſi Analyſis tota Infiniteſimalis ſola ſua opera acceſſerat.

** Annon *Newtonus* hujuſmodi æquationes prius invenit, qui docuit Fluentem ex Æquatione Fluxionem involvente extrahere, & Curvas Mechanicas ad Æquationes Numero Terminorum Infinitas reduxit, pergendo ab hujuſmodi æquationibus finitis? Annon tota Fluxionum Methodus inverſa, ubi de Curvis agitur, pendeat ab hujuſmodi Æquationibus ad Curvas applicatis?

multa, vel jacent in mole chartarum aliquando excutienda digerendaque, ubi a neceſſariis occupationibus vacatio erit; quam mihi tam ſubito quam vellem promittere non poſſum.

Ex Epiſtola Walliſii *ad D.* Leibnitium, *Apr. 6.* 1697.

Vir Nobiliſſime Celeberrimeque,

Literas tuas humaniſſimas *Martii* $\frac{19}{29}$ *Hannoveræ* datas, accepi (& exoſculatus ſum) *Martii* 31 ſtilo noſtro 1697; hoc eſt, *Apr.* 10. ſtilo novo. Mihique gratulor quod Nobiliſſimo Viro Ego Meaque non diſplicuerint. Veniam interim exorare debeo, ſi locorum diſtantia fecerit, ut eruditiſſima tua ſcripta & inventa minus ego ſciverim aut intellexerim, quam vellem; & quidem, quis ſit ille tuus *Calculus Differentialis* non ſatis mihi compertum ſit; niſi quod mihi nuper nunciatum eſt, eum cum *Newtoni Doctrina Fluxionum* quaſi coincidere.

Nec pudet me meam hac in parte ignorantiam fateri, qui jam ab aliquot annis contentus fuerim (hac ætate) *lampadem tradere*; aliiſque permittere, ut promoveant ea quæ (ſiqua) ego non infeliciter detexerim.

Quod Literas ſcripſeris (in mei gratiam) ad Editores *Actorum Lipſicorum*, favori tuo debeo, & grates habeo.

Quis eorum ille ſit, qui mea ſcripta recenſuit in *Actis Lipſicis* pro menſe *Junii* 1696, Ego quidem non ſcio; ſed ei gratias habeo. Neque enim eſt cur ego ei ſuccenſere debeam, ſi non (primo intuitu) ſtatim perſpexerit omnia quæ penitius rimanti occurriſſent, aut etiam ſint occurſura. Sufficit enim inſtituto ſuo, ut ſumma quæque carpat & magis obvia; Lectoribus permittendo, ſi penitiora deſiderent, apud Authores indicatos quærere. Nolim autem exiſtimes quod in gentem veſtram minus æquo ſim animo; nam ſecus eſt, &c.

Ubi dicitur, *Nicolaum Mercatorem primum eſſe qui Quadraturam aliquam dedit per Seriem Infinitam:* Vide annon mea talis ſit, Ar. Infin. Pr. 191.

$\square = \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times\&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times\&c.}$ *Et Brounkeri* $\square = 1\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}\frac{81}{2}$ &c.

Sed & omnes mearum tabellarum ſeries, in Arithmetica Infinitorum, ſunt *Series Infinitæ*; & earum plurimæ quales quæ Vobis dicuntur (novo nomine) Series *Tranſcendentales*.

Nolim utique ut Clariſſimo Viro fraudi ſit nova Compellatio. Nam quas ego vocaveram *Continuas Approximationes*, vocat *Jacobus Gregorius Series Convergentes*; & *Newtonus Series Infinitas*; ſed res eadem eſt. Sic quod ego vocaveram *Centrum Percuſſionis*, vocat *Hugenius* (novo nomine) *Centrum Oſcillationis*; ſed eadem res eſt. Et *Fermatii Hyperbolæ Infinitæ* eædem ſunt cum meis *Seriebus Reciprocis*. Et *Galilæi Cycloides*, *Merſenni*

 Trochoides,

Trochoides, mea *Cyclois*, & *Cuſani* Curva (quocunque nomine dicatur) ſunt res eadem. Sic Rectificata Curva *Nelii*, & Curva *Heuratii*, & Curva demum *Fermatii*, eadem eſt cum mea *Paraboloide Semi cubicali*. Et Gallorum *Socia Cycloidis* eſt ea Curva quæ (mihi) terminat Figuram *Sinuum rectorum*. Et, ni fallor (ſic ſaltem mihi nunciatum eſt) *Newtoni Doctrina Fluxionum* res eadem eſt (vel quam ſimillima) quæ vobis dicitur *Calculus Differentialis* : Quod tamen neutri præjudicio eſſe debet.

Ex Epiſtola D. Leibnitii *ad* Walliſium *ſcripta*, 28 Maii 1697.

Methodum *Fluxionum* profundiſſimi *Newtoni*, cognatam eſſe methodo meæ *Differentiali*, non tantum animadverti * poſtquam opus ejus & tuum prodiit ; ſed etiam profeſſus ſum in *Actis Eruditorum*, & alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minus quam ipſius merito. Itaque communi nomine deſignare ſoleo † *Analyſeos Infiniteſimalis* ; quæ latius quam Methodus *Tetragoniſtica* patet.

Interim, quemadmodum & *Vietæa* & *Carteſiana* methodus *Analyſeos Speciosæ* nomine venit ; diſcrimina tamen nonnulla ſuperſunt : ita fortaſſe & *Newtoniana* & *Mea* differunt in nonnullis.

Mihi conſideratio Differentiarum & Summarum in ſeriebus Numerorum, ** primam lucem affuderat, cum animadverterem Differentias Tangentibus, & Summas Quadraturis, reſpondere. Vidi ‡ mox Differentias Differentiarum in Geometria *Oſculis* exprimi. Et notavi mirabilem analogiam relationis inter Differentias & Summas, cum relatione inter Potentias & Radices. Itaque judicavi, præter affectiones quantitatis

* Quaſi *Leibnitius* hoc non advertiſſet anno 1677, ubi primum incidit in Methodum *Newtoni*. Vide literas ejus ſupra impreſſas, p. 90, 91. Certe Methodum *Newtoni* ante annum 1671 inventam fuiſſe *Leibnitius* ex Literis ejus intellexerat, ſed in Actis *Lipſicis* hoc nunquam agnovit. Vide ſupra p. 70, 71, 72. Sic & ſe ab *Oldenburgo* Series *Newtonianas* & *Gregorianas* ineunte anno 1675 accepiſſe, ſtatim oblitus eſt ; p. 40, 41, 42, 45. Et Methodum Serierum ſe ab *Oldenburgo* poſtulaſſe & a *Newtono* accepiſſe, ſtatim oblitus eſt ; p. 45, 62, 98. Et Problemata Tangentium inverſa ab Æquationibus & Quadraturis pendere ſe primum negaſſe & ſubinde a *Newtono* didiciſſe, ſtatim oblitus eſt ; p. 65, 85, 86, 93.

† Methodum Fluxionum & Methodum Differentialem eſſe unam & eandem Methodum *Leibnitius* hic agnoſcit, ideoq; ſe communi nomine Analyſeos Infiniteſimalis deſignare ſolere, licet in nonnullis differre poſſint, ut Analyſis ſpecioſa Vietæ & ea *Carteſii* in nonnullis differunt. Quæritur quis ſit Analyſeos hujus Infiniteſimalis inventor primus & ecquid alter alterius inventis addiderit.

** Fatetur hic *Leibnitius* Methodum Tangentium per Differentias primam lucem ipſi affudiſſe, id eſt, Methodum quam *Fermatius*, *Gregorius*, *Barrovius* coluere, *Newtonus* p. 14, 15, ad Quantitatum augmenta momentanea generaliter applicuit. Hancce Tangentium methodum *Leibnitius*, lectis *Newtonianis*, meditatur, p. 47, 71, 86, 87, 88, generalem reddit, p. 88, 89, & *Newtonianæ* ſimilem eſſe ſtatim videt, p. 90, 91, 93.

‡ *Fermatius* & *Schootenus* hoc antea viderunt, determinando Punctum flexus contrarii in Conchoide.

tis hactenus receptas y, y^2, y^3, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, &c. vel generaliter y^e, ſive $[p^e]y$, vel potentiæ ipſius y ſecundum exponentem e; poſſe adhiberi novas Differentiarum vel Fluxionum affectiones, dy, d^2y, (ſeu ddy,) d^3y, (ſeu $dddy$,) imo utiliter etiam occurrit $d^{\frac{1}{2}}y$, & ſimiliter generaliterque $d^e y$.

Hac jam Affectione admiſſa, * vidi commode per Æquationes exprimi poſſe quantitates quas a ſua Analyſi & Geometria excluſerat *Carteſius*; & Curvas, quas ille non recte vocat *Mechanicas*, hac ratione calculo non minus ſubjici, quam ab ipſo in Geometriam receptas. Et, quemadmodum Veteres jam Æquationes Curvarum *Locales* obſervaverant, ſed *Carteſius* tamen utilem operam nobis navavit dum eas calculo ſuo expreſſit: ita putavi me non inutiliter facturum, ſi oſtenderem Methodum Curvas ab ipſo excluſas ſimiliter per Æquationes exprimendi; quarum ope omnia de iis certo calculi filo haberi poſſint.

Et licet fatear, quemadmodum rem ipſam, in Æquationibus Curvarum Localibus facilioribus, calculo *Carteſii* expreſſam, jam tenebant Veteres; ita rem ipſam, meis Æquationibus Differentialibus facilioribus expreſſam, non potuiſſe Tibi aliiſque egregiis Viris eſſe ignotam: non ideo minus tamen puto & *Carteſium* & *Me* aliquod utile præſtitiſſe. Nam antequam talia ad conſtantes quoſdam Characteres calculi analytici reducuntur, tantumque omnia vi mentis & imaginationis ſunt peragenda, non licet in magis compoſita abditaque penetrare; quæ tamen, calculo ſemel conſtituto, luſus quidem jocuſque videantur.

Unde jam mirum non eſt, † Problemata quædam, poſt receptum calculum meum, ſoluta haberi, quæ antea vix ſperabantur: Et præſertim quæ ad tranſitum pertinent a Geometria ad Naturam. Quoniam ſcilicet Vulgaris Geometria minus ſufficit, quoties Infiniti involvitur conſideratio; quam pleriſque Naturæ operationibus ineſſe conſentaneum eſt, quo melius referat Autorem ſuum.

Hugenius certe, ** qui hæc ſtudia haud dubie profundiſſime inſpexerat, multiſque modis auxerat, initio parvi faciebat Calculum meum, nondum perſpecta ejus utilitate. Putabat enim dudum nota ſic tantum nove exprimi: prorſus quemadmodum *Robervallius* & alii, initio, *Carteſii* Curvarum calculos parvi faciebant. Sed mutavit poſtea *Hugenius* ſententiam ſuam,

* *Leibnitius* hoc non vidit ante annum 1677. Scripſit enim anno 1676 inverſa Tangentium Problemata, & alia multa ab æquationibus non pendere. Reſcripſit *Newtonus* hujuſmodi Problemata in poteſtate eſſe, nempe per Æquationes ſuas. Et tum demum *Leibnitius* a *Newtono* admonitus hæc vidit. Vide pag. 65. lin. 14.

† Mirum eſt hæc a D. *Leibnitio* dici, qui ex Literis & Principiis *Newtoni* intellexerat Methodum ſolvendi hujuſmodi Problemata *Newtono* ante annum 1671 innotuiſſe, & ipſum primum per hanc Methodum Problemata tractaſſe quæ ad tranſitum pertinent a Geometria ad Naturam.

** *Hugenius* Literas quæ inter *Newtonum* & *Leibnitium* mediante *Oldenburgo* interceſſerant nunquam vidit.

Digitized by Google

ſuam, cum videret quam commoda eſſet hæc exprimendi ratio, & quam facile per eam res involutiſſimæ evolverentur. Itaque maximi eam a ſe fieri aliquot ante obitum annis, non tantum in privatis ad me alioſque literis, ſed publice quoque eſt profeſſus.

Cæterum *Tranſcendentium* appellationem, nequid a me præter rationem in phraſi Geometrica novari putes, ſic accipio ut Tranſcendentes quantitates opponam Ordinariis & Algebraicis: Et Algebraicas quidem vel Ordinarias voco Quantitates, quarum relatio ad datas exprimi poteſt Algebraice; id eſt, per Æquationes certi gradus, primi, ſecundi, & tertii, &c. quales quantitates *Carteſius* ſolas in ſuam Geometriam recipiebat: Sed *Tranſcendentes* voco, quæ omnem gradum Algebraicum tranſcendunt. Has autem exprimimus, vel per valores Infinitos, & in ſpecie per Series, (neque enim ipſas Series *Tranſcendentales* voco, ſed Quantitates ipſis exprimendas) vel per Æquationes Finitas; eaſque vel Differentiales (ut cum Ordinata Cycloidis Methodo mea exprimitur per Æquationem † $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ay - yq}}$) vel Exponentiales, (ut cum incognita quædam x exprimitur per hanc Æquationem $x^x + x = 1$.) Et quidem Tranſcendentium Exponentialem pro perfectiſſima habeo; quippe qua obtenta, nihil ultra quærendum reſtare arbitror; quod ſecus eſt in cæteris.

Primus autem, ni fallor, etiam *Exponentiales* Æquationes introduxi, cum Ignota ingreditur Exponentem. Et jam anno primo * *Actorum Lipſienſium*, ſpecimen dedi in exemplo quantitatis Ordinariæ *Tranſcendentaliter* expreſſæ, ut res fieret intelligibilior; Nempe, ſi quæratur $x^x + x = 30$, patet $x = 3$ ſatisfacere; cum ſit $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$.

* Imo Anno 1677. Vide pag. 94, 95. † Legendum $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax - xx}}$. Idem ſic deſignari poteſt $y = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{ax - xx}}$, vel ſic $\dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{ax - xx}}$. Et nota quod ubi Differentiæ referuntur ad Summas, rectius dicerentur Partes. Sunt enim non Differentiæ Summarum ſed Partes, & nullam relationem habent ad Summas, niſi quatenus ſunt earum Partes.

Ex Epiſtola Walliſii *ad* Leibnitium, Julii 30, 1697.

Optaverim item ut Tibi vacet tuum *Calculum Differentialem*, & *Newtono* ſuam *Fluxionum Methodum*, juſto ordine exponere; ut quid ſit utrique Commune, & quid interſit Diſcriminis, & utramque diſtinctius intelligamus. *

* Ut *Leibnitius* Differentiam Methodorum exponat iterum rogat *Walliſius*, ſed fruſtra.

In

Digitized by Google

In Diſſertatione D. Nicolai Fatii Duillierii, *R. S. S. de inveſtigatione Geometrica* Lineæ Breviſſimi deſcenſus *&c.* Londini *Anno* 1699 *edita. pag.* 18, *hæc habentur.*

" *NEwtonum* primum, ac pluribus Annis vetuſtiſſimum, hujus Calculi " Inventorem, ipſa rerum evidentia coactus, agnoſco: a quo utrum " quicquam mutuatus ſit *Leibnitius* ſecundus ejus Inventor, malo eorum, " quam meum, ſit Judicium, quibus viſæ fuerint *Newtoni* Literæ aliique " ejuſdem Manuſcripti Codices.

Et reſpondit D. Leibnitius *in Actis Lipſienſibus Menſe* Maii 1700.

" CErte cum Elementa calculi mea edidi anno 1684, ‡ne conſtabat " quidem mihi aliud de Inventis ejus in hoc genere, quam quod " ipſe olim ſignificaverat in literis, poſſe ſe Tangentes invenire non ſublatis Irrationalibus; quod *Hugenius* quoque ſe poſſe mihi ſignificavit po- " ſtea, etſi cæterorum iſtius calculi adhuc expers: ſed majora multo " conſecutum *Newtonum*, viſo demum libro Principiorum ejus ſatis in- " tellexi. Calculum tamen differentiali tam ſimilem ab eo exerceri, non " ante didicimus, quam cum non ita pridem magni Geometræ *Johannis* " *Walliſii* operum volumina primum & ſecundum prodiere, *Hugeniuſque* " curioſitati meæ favens locum inde deſcriptum ad *Newtonum* pertinentem " mihi mature tranſmiſit.

Et poſt aliqua: " Quam [*methodum*] ante Dominum *Newtonum* & me " nullus quod ſciam Geometra habuit; uti ante hunc maximi nominis " Geometram, NEMO ſpecimine publice dato ſe habere probavit: ante " Dominos *Bernoullios* & Me nullus communicavit.

‡ Conſtabat certe D. *Leibnitjo*, jam ab anno 1677, Curvarum Quadraturas faciliores reddi, & Problemata Tangentium inverſa D. *Newtoni* Methodis ſolvi; idque nonnunquam per quadraturas ſolas, nonnunquam per Methodos generaliores. Confer Literas ejus pag. 90, 91, & ſeq. cum pag. 71, 72, 85, 86; ut & cum pag. 30. lin. 15, 16, & pag. 47, lin. 4, 8, 15, &c.

D. Fatio *autem Replicationem ſuam ad Editores* Lipſienſes *ut publicaretur mittente, Hi, quaſi lites averſati, eandem Actis ſuis inſerere recuſarunt. Vide* Act. Lipſ. Martii 1701, *pag.* 134.

Tandem

Tandem ubi prodiere. Newtoni *Libri de Numero Curvarum ſecundi generis, deque Quadratura Figurarum, Editores* Actorum Lipſienſium, *ſtylo* Leibnitiano, *Synopſin libri prioris his verbis concluſerunt. Vide* Act. Lipſ. Januarii 1705.

*CÆterum autor non attingit Focos vel Umbilicos Curvarum ſecundi generis & multo minus generum altiorum. Cum * ergo ea res abſtruſioris ſit indaginis & maximi tamen in hoc genere uſus, tum ad deſcriptiones tum ad alias proprietates Curvarum, & doctrina hac Focorum ab illuſtriſſimo D.* ‖ D. T. *profundius ſit verſata ; ſupplementum ejus pro his Curvis ab ipſius ingenio expectamus.*

Dein libri alterius Synopſin ſequentem (ſi Synopſis dici mereatur) eodem ſtylo ſubjunxerunt.

Ingenioſiſſimus deinde Autor antequam ad Quadraturas Curvarum (vel potius Figurarum Curvilinearum) ‡ *veniat, præmittit brevem* Iſagogen. *Quæ* † *ut melius intelligatur, ſciendum eſt cum magnitudo aliqua continue creſcit, veluti Linea (exempli gratia) creſcit fluxu Puncti quod eam deſcribit,* ** *incrementa illa momentanea appellari differentias, nempe inter magnitudinem quæ antea erat, & quæ per mutationem momentaneam eſt producta ; atque hinc natum eſſe Calculum Differentialem, eique reciprocum Summatorium ; cujus elementa ab inventore D.* Godefrido Guilielmo Leibnitio *in his Actis ſunt tradita, variique uſus tum ab ipſo, tum a D. D. Fratribus* Bernoulliis, *tum & D. Marchione* Hoſpitalio, *(cujus nuper extincti immaturam mortem omnes magnopere dolere debent, qui profundioris doctrinæ profectum amant) ſunt oſtenſi. Pro differentiis igitur* Leibnitianis *D.* Newtonus †† *adhibet, ſemperque adhibuit,* Fluxiones, quæ ſunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita ; *iiſque tum in ſuis Principiis Naturæ Mathematicis, tum in aliis poſtea editis eleganter eſt uſus, quemadmodum &* Honoratus Fabrius *in ſua Synopſi Geometrica, motuum progreſſus* Cavallerianæ

* Compilatores Actorum in ſcribendis librorum Breviariis, a cenſuris temerariis abſtinere debent. Ex hac cenſura patet animus ſcriptoris in D. *Newtonum.*

‖ Literis D. T. *Tſchurnhauſius* deſignatur.

‡ Hæc *Iſagoge* & Corollarium Propoſitionis ultimæ ſcripta ſunt ubi liber prodiit, reliqua ex MS. antiquo manibus amicorum trito impreſſa ſunt.

† Ut *Iſagoge* melius intelligatur, *Leibnitius* deſcribit calculum ſuum differentialem & omittit calculum *Newtonianum*, quem ſolum deſcribere debuiſſet. Hoc fecit, non ut calculus *Newtonianus* in *Iſagoge* traditus melius intelligatur, ſed ut rejiciatur.

** Incrementa illa momentanea *Newtonus* momenta, *Leibnitius* poſtea differentias vocavit. Et inde natum eſt nomen Calculi differentialis.

†† Senſus verborum eſt quod *Newtonus* Fluxiones Differentiis *Leibnitianis* ſubſtituit, quemadmodum *Honoratus Fabrius* motuum progreſſus *Cavallerianæ* methodo ſubſtituerat ; id eſt quod *Leibnitius* Author primus fuit hujus Methodi, & *Newtonus* eandem a *Leibnitio* habuit, ſubſtituendo Fluxiones pro Differentiis.

vallerianæ *methodo ſubſtituit.* Subinde Editores vice Symbolorum *Newtoni* deſcribunt ſymbola *Leibnitii*, & poſtea librum *Newtoni* ſic breviter attingunt. *Cum regreſſus a Differentiis ad quantitates, vel a quantitatibus ad ſummas, vel denique a Fluxionibus ad Fluentes non ſemper Algebraice fieri poſſit, ideo quærendum eſt, tum quibus caſibus Quadratura Algebraice ſuccedat, tum quomodo Algebraico ſucceſſu deficiente aliquid ſubſidiarium adhiberi queat. In utroque enim a D.* Newtono *eſt utiliſſime laboratum, tum alias, tum in hoc Tractatu de Quadraturis, ubi Series adhibet Infinitas quæ eo caſu quo abrumpuntur ſeu finiuntur, quæſitum Algebraice exhibent. De* * *quo etiam dictum eſt nuper in recenſione Tractatus D.* Cheynæi, *Medici* Scoti Londini *degentis. Conferri etiam poteſt Tractatus D.*Craigii Scoti *de Quadraturis, & ejuſdem Theorema ad Quadraturas pertinens, nuper in his Actis exhibitum; quæ faciunt etiam ut ipſis Theorematis* Newtonianis *recenſendis ſuperſedeamus, quia paucis exponi non poſſunt : quemadmodum nec ejuſdem Theoremata quædam reductionis ad Quadraturas faciliores.*

* Senſus eſt quod, Quæ *Newtonus* habet in hoc Tractatu de Quadraturis, & ſpeciatim de Quadraturis illis ubi Series abrumpuntur vel finiuntur, a *Cheynæo* & *Craigio* prius dicta ſunt, & in his Actis nuper exhibita ; quæ quia multa ſunt faciunt ut a *Newtonianis* recenſendis Editores Actorum ſuperſedeant. Et eodem ſenſu D. *Leibnitius* ad Secretarium Societatis Regiæ nuper ſcripſit, *ſuum cuique hic redditum eſſe*, quaſi ſecundam *Newtoni* ad *Oldenburgum* Epiſtolam ad ſe miſſam & ſupra impreſſam nunquam legiſſet. Vide pag. 72, 73, 74, 76.

His permotus D. Joannes Keill, *in Epiſtola in* Philoſophicis Tranſactionibus *A. C.* 1708, *menſibus* Maio *&* Junio *impreſſa, ſcripſit in contrarium, quod* Fluxionum Arithmeticam, ſine omni dubio, primus invenit Dominus *Newtonus*, ut cuilibet ejus Epiſtolas a *Walliſio* editas legenti facile conſtabit. Eadem tamen Arithmetica poſtea mutatis Nomine & Notationis modo, a Domino *Leibnitio* in *Actis Eruditorum* edita eſt.

Epiſtola D. Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *Regiæ Societatis Secretarium*, 4°. Martii *S. N.* 1711 *data.*

GRatias ago quod noviſſimum Volumen præclari Operis *Tranſactionum Philoſophicarum* ad me miſiſti ; quamvis nunc demum mihi *Berolinum* excurrenti redditum ſit. Itaque excuſabis quod pro munere ſuperioris anni nunc demum gratiæ dudum debitæ redduntur.

Vellem inſpectio Operis me non cogeret nunc ſecunda vice ad vos querelam deferre : Olim *Nicolaus Fatius Duillierius* me pupugerat in publico

 ſcripto,

ſcripto, tanquam alienum Inventum mihi attribuiſſem. Ego eum in *Actis Eruditorum Lipſienſibus* meliora docui; & vos ipſi, ut ex Literis a Secretario Societatis veſtræ inclytæ (id eſt, quantum memini, a Teipſo) ſcriptis didici, hoc improbaſtis. Improbavit *Newtonus* ipſe vir excellentiſſimus, (quantum intellexi) præpoſterum quorundam hac in re erga veſtram gentem & ſe ſtudium. Et tandem D. *Keillius* in hoc ipſo volumine, menſe *Sept. Octob.* 1708, pag. 185, renovare ineptiſſimam accuſationem viſus eſt, cum ſcripſit, *Fluxionum Arithmeticam a* Newtono *inventam, mutato nomine & notationis modo a me editam fuiſſe.* Quæ qui legit, & credit, non poteſt non ſuſpicari alterius inventum a me larvatum ſubdititiis nominibus characteribuſque fuiſſe protruſum. Id quidem quam falſum ſit nemo melius ipſo D. *Newtono* novit. Certe ego nec nomen Calculi Fluxionum fando audivi, nec Characteres quos adhibuit D. *Newtonus* his oculis vidi, antequam in *Walliſianis* Operibus prodiere. Rem etiam me habuiſſe, multis ante annis quam edidi, ipſæ literæ apud *Walliſium* editæ demonſtrant. Quomodo ergo aliena mutata edidi quæ ignorabam.

Etſi autem D. *Keillium* (a quo magis præcipiti judicio quam malo animo peccatum puto) pro calumniatore non habeam; non poſſum tamen non ipſam accuſationem in me injuriam pro calumnia habere. Et quia verendum eſt ne ſæpe vel ab improbis vel ab imprudentibus repetatur; cogor remedium ab Inclyta veſtra Societate Regia petere. Nempe æquum eſſe vos ipſi credo judicabitis, ut D. *Keillius* teſtetur publice, non fuiſſe ſibi animum imputandi mihi quod verba inſinuare videntur, quaſi ab alio hoc quicquid eſt Inventi didicerim & mihi attribuerim. Ita ille & mihi læſo ſatisfaciet, & calumniandi animum a ſe alienum eſſe oſtendet; & aliis aliâs ſimilia aliquando jactaturis frœnum injicietur. Quod ſupereſt vale & fave.

Dabam *Berolini* 4 *Martii* 1711.

Epiſtola D. Johannis Keill, *A. M. ex Æde Chriſti* Oxon, R. S. *Socii, & jam Aſtronomiæ Profeſſoris* Saviliani, *ad D.* Hans Sloane *M. D.* Regiæ Societatis *Secretarium, cum D.* Leibnitio *communicanda.*

CUM D. *Leibnitii* Epiſtolam mecum Vir Cl. communicare dignatus ſis; ea etiam quæ mihi viſum fuerit reſcribere, ne graveris accipere. Sentio Virum egregium acerrime de me queri, quaſi ei injuriam fecerim, & rerum a ſe inventarum gloriam alio tranſtulerim; fateor querelam hanc ideo mihi moleſtam eſſe, quod nolim ea ſit de me hominum Opinio, quaſi ego calumniandi ſtudio, cuiquam in rebus Mathematicis verſanti, nedum

Digitized by Google

nedum Viro in iiſdem verſatiſſimo, obtrectarem; certe nihil ab ingenio meo magis alienum eſt, quam alterius laboribus quicquam detrahere.

Agnoſco me dixiſſe Fluxionum Arithmeticam a D. *Newtono* inventam fuiſſe, quæ mutato Nomine & Notationis modo a *Leibnitio* edita fuit; ſed nollem hæc verba ita accipi, quaſi aut Nomen quod Methodo ſuæ impoſuit *Newtonus*, aut Notationis formam quam adhibuit, D. *Leibnitio* innotuiſſe contenderem; ſed hoc ſolum innuebam D. *Newtonum* fuiſſe primum inventorem Arithmeticæ Fluxionum, ſeu Calculi Differentialis; eum autem in duabus ad *Oldenburgum* ſcriptis Epiſtolis, & ab illo ad *Leibnitium* tranſmiſſis, indicia dediſſe perſpicaciſſimi ingenii viro ſatis obvia; unde *Leibnitius* principia iſtius Calculi hauſit, vel ſaltem haurire potuit: At cum Loquendi & Notandi formulas, quibus uſus eſt *Newtonus*, Ratiocinando aſſequi nequiret Vir illuſtris, ſuas impoſuit.

Hæc ut ſcriberem impulerunt Actorum Lipſienſium Editores, qui in ea quam exhibent operis *Newtoniani* de Fluxionibus ſeu Quadraturis enarratione, diſerte affirmant D. *Leibnitium* fuiſſe iſtius Methodi Inventorem, & *Newtonum* aiunt pro Differentiis *Leibnitianis* Fluxiones adhibere, ſemperque adhibuiſſe. Id quidem in iiſdem ſcriptoribus obſervatu dignum, quod Loquendi & Notandi formam a *Newtono* adhibitam, in *Leibnitianam* paſſim in eadem enarratione transferunt; de Differentiis ſcilicet & Summis & calculo Summatorio loquuntur, de quibus eſt nullus apud *Newtonum* Sermo; quaſi inventa *Newtoni Leibnitianis* poſteriora fuerint, & a Calculo *Leibnitii* in Actis Lipſienſibus Anno 1684 deſcripto ortum derivarint. Cum revera *Newtonus*, ut ex ſequentibus patebit, Fluxionum Methodum invenerit, octodecim ſaltem annos antequam *Leibnitius* quicquam de Calculo Differentiali ediſiſſet, Tractatumque de ea re conſcripſerit; cujus cum ſpecimina quædam *Leibnitio* oſtenſa ſint, rationi non incongruum eſt, ea aditum illi ad Calculum Differentialem aperuiſſe.

Unde ſi quid de *Leibnitio* liberius dixiſſe videar, id eo animo feci, non ut ei quicquam eriperem, ſed ut quod *Newtoni* eſſe arbitrabar auctori ſuo vindicarem.

Maxima equidem eſſe *Leibnitii* in Rempublicam Literariam merita lubens agnoſco; nec eum in reconditiore Matheſi Scientiſſimum eſſe diffitebitur qui ejus in Actis Lipſienſibus ſcripta perlegerit: cum autem tantas tamque indubitatas opes de proprio poſſideat, certe non video cur ſpoliis ab aliis detractis onerandus ſit. Quare cum intellexerim populares ſuos ita illi favere, ut eum laudibus non ſuis accumulent; *haud præpoſterum in gentem noſtram ſtudium eſſe duxi*, ſi *Newtono* quod ſuum eſt tueri & conſervare anniterer. Nam ſi Lipſienſibus fas fuerit aliena *Leibnitio* affingere, *Britannis* ſaltem ea quæ a *Newtono* erepta ſunt ſine crimine calumniæ repoſcere licebit; itaque cum ad Regiam Societatem appellet Vir illuſtris, meque publice teſtari velit calumniandi animum a me alienum eſſe; ut Calumniandi crimen a me amoveam, mihi oſtendendum incum-

incumbit D. *Newtonum* verum & primum fuiſſe Arithmeticæ Fluxionum ſeu Calculi Differentialis Inventorem; deinde ipſum adeo clara & obvia Methodi ſuæ indicia *Leibnitio* dediſſe, ut inde ipſi facile fuerit in eandem Methodum incidere.

Sciendum vero primum eſt, Celeberrimos tunc temporis Geometras, Dominos *Franciſcum Sluſium*, *Iſaacum Barrovium*, & *Jacobum Gregorium*, Methodum habuiſſe qua Curvarum Tangentes ducebant, quæ a Fluxionum Methodo non multum abludebat; & iiſdem principiis innixa fuit. Nam ſi pro Litera *o*, quæ in *Jacobi Gregorii* Parte Matheſeos Univerſali quantitatem infinite parvam repræſentat; aut pro Literis *a* vel *e* quas ad eandem deſignandam adhibet *Barrovius*; ponamus $\dot{x}$ vel $\dot{y}$ *Newtoni*, vel dx ſeu dy *Leibnitii*, in Formulas Fluxionum vel Calculi Differentialis incidemus, & regreſſus quo a data Tangentium proprietate ad naturam Curvæ perveniebant, (quem Methodum Tangentium inverſam nominabant) eadem plane res erat ac Methodus qua a Fluxionibus ad Fluentes revertitur: interim ſuam Methodum non ultra Fluxiones primas extendebant; neque eandem ad Quantitates Surdis aut Fractionibus involutas accommodare potuerunt. At prius quam quicquam de hoc argumento a ſummis hiſce viris publico datum eſt, D. *Newtonus* Methodum excogitavit, priori quidem non diſſimilem ſed multo latius patentem, quæ non ſubſtitit ad Æquationes eas in quibus una vel utraque quantitas indefinita Radicalibus eſt involuta, ſed abſque ullo æquationum apparatu Tangentem confeſtim ducere monſtrabat, Quæſtiones de Maximis & Minimis eodem Artificio tractabat, & Speculationes de Quadraturis facilius explicuit. Hæc conſtant ex Epiſtola *Newtoni* ad D. *Collinium* data, *Decembris* Die 10, Anno 1672, & inter *Collinii* Chartas reperta.

Hæc Epiſtola habetur impreſſa pag. 29, 30.

Ex hac Epiſtola clare conſtat D. *Newtonum* Methodum Fluxionum habuiſſe ante annum 1670, eodem nempe quo *Barrovii* Lectiones editæ ſunt.

Anno 1669 miſit *Newtonus* ad D. *Collinium* Tractatum de Analyſi per Æquationes Infinitas; quem etiam inter ſchedas *Collinii* repertum D. *Jones* nuper edidit. Sub hujus fine habetur demonſtratio Regulæ pro Quadraturis Curvarum, nata ex proportione Augmentorum naſcentium Abſciſſæ & Ordinatæ, cum Abſciſſa ſit x & Ordinata $x^{\frac{m}{n}}$; quæ quidem demonſtratio commune fundamentum eſt tam Doctrinæ Fluxionum, quam Calculi Differentialis: ex eo autem Tractatu non pauca amicis ſuis communicanda deprompſit *Collinius*. Unde certum eſt D. *Newtono* ante illud tempus Fluxionum Arithmeticam innotuiſſe. Præterea conſtat ex poſteriore *Newtoni* ad *Oldenburgum* Epiſtola: " Eum ſuadentibus amicis " circa annum 1671 Tractatum de hiſce rebus conſcripſiſſe; quem una " cum Theoria Lucis & Colorum in publicum dare ſtatuerat: ſcribitque

" *Oldenburgo*

“ *Oldenburgo* Series Infinitas non magnam ibi obtinuiſſe partem ; ſeque
“ alia haud pauca congeſſiſſe, inter quæ erat Methodus ducendi Tangen-
“ tes quam ſolertiſſimus *Sluſius* ante annos duos treſve cum *Oldenbur-*
“ *go* communicaverat ; ſed quæ generalior facta, non ad Æquationes,
“ quæ Surdis aut Fractionibus involutæ ſunt, hærebat ; & eodem fun-
“ damento uſum ad Theoremata generalia, Quadraturas Curvarum
“ ſpectantia, perveniſſe ſe ait *Newtonus*. Horum unum Exempli loco in
“ ipſa Epiſtola ponit ; Seriem exhibens cujus termini dant Quadraturam
“ Curvæ, cum abſciſſa eſt z & Ordinatim-applicata $dz^{\theta} \times \overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda}$. Quæ Series abrumpitur & terminis finitis Curvæ Quadraturam comprehendit, quandocunque illa finita æquatione exprimi poteſt. Hoc dicit eſſe primum Theorematum Generaliorum ; unde ſequitur eum alia ad Caſus difficiliores & magis intricatos accommodata habuiſſe : eſt autem Theorema illud propoſitio V in Tractatu de Quadraturis. Eodem etiam ſpectat ejuſdem Prop. VI, ſed ad Caſus magis implicatos ſe extendit. Propoſitiones Tertia & Quarta ſunt Lemmata Theor. hiſce demonſtrandis præmiſſa, Secunda autem in Quadraturis propoſitio extat in Tractatu de Analyſi per Æquationes Infinitas, & prima Propoſitio eſt ea ipſa, quam in dicta Epiſtola fundamentum Operationum vocat, & tranſpoſitis Literis celari tunc voluit. Scribit etiam *Newtonus* ſe dudum Theoremata quædam, quæ comparationi Curvarum cum ſectionibus Conicis inſerviant, in Catalogum retuliſſe, & Ordinatas Curvarum quæ ad eam normam comparari poſſunt, in eadem Epiſtola deſcribit ; quæ profecto eadem plane ſunt cum iis, quas Tabula ſecunda ad Scholium Propoſitionis X in Tractatu de Quadraturis, exhibet ; unde ſatis liquet Tabulam illam & Propoſitiones 7, 8, 9 & 10 quæ ſunt in Tractatu de Quadraturis, (a quibus Tabula pendet) *Newtonum* dudum inveniſſe ante annum 1676, quo ſcripta eſt Epiſtola illa poſterior. Cum vero, in prima ad *Oldenburgum* Epiſtola, dicit ſe ab ejuſmodi ſtudiis per Quinquennium abſtinuiſſe, hinc ſatis clare colligi poteſt, Propoſitiones in Tractatu de Quadraturis a D. *Newtono* inventas fuiſſe, quinquennio ſaltem antequam Epiſtolæ illæ ad *Oldenburgum* ſcriptæ eſſent, totamque illam de Fluxionibus Doctrinam, ante illud tempus ulterius a *Newtono* provectam eſſe, quam ad hunc uſque diem a quoquam alio factum eſt ſub nomine Calculi Differentialis. Certe neminem novi qui in hac provincia peragranda æquis paſſibus cum *Newtono* progreſſus ſit : & pauci ſunt, iique inſignes Geometræ, qui proſpicere queant, quouſque ille in eadem provincia proceſſerit. Præterea in poſteriore illa ad *Oldenburgum* Epiſtola modum deſcribit, quo in Seriem inciderit cujus termini Fluxiones ſeu Differentias quantitatum in infinitum exhibent ; quæ poſtquam inventa eſſet, dicit Peſtem ingruentem ipſum coegiſſe hæc ſtudia deſerere & alia cogitare. At Peſtis illa contigit Annis 1665 & 1666 ; unde patet, etiam ante illud tempus Fluxionum Calculum D. *Newtono* innotuiſſe, hoc eſt duodecim ſaltem Annos ante-

Digitized by Google

quam Calculum ſuum *Oldenburgo* communicavit *Leibnitius*; & novemdecim annos antequam Vir Illuſtris eandem in Actis Lipſienſibus edidit: & certe ante viſas haſce duas *Newtoni* Epiſtolas, *Leibnitium* Calculum ſuum Differentialem habuiſſe nulla apparent veſtigia. His omnibus rite perpenſis certiſſime cuivis conſtabit, D. *Newtonum* pro vero Inventore Arithmeticæ Fluxionum habendum eſſe.

Reſtat jam ut inquiramus quænam fuere Indicia *Leibnitio* a *Newtono* derivata, unde ei facile foret Calculum Differentialem elicere. Et primo, ut dixi, nullibi oſtendit *Leibnitius* ſibi notum fuiſſe Calculum Differentialem, ante viſas has duas *Newtoni* Epiſtolas; imo ante illud tempus longiore uſus eſt circuitu, cum res facilius multo & ſuccinctius ex Calculo fluerent Differentiali. Hujus rei teſtis ſit Epiſtola ad *Oldenburgum* data $\frac{18}{28}$ *Novembris* 1676, quæ in Operum *Walliſianorum* Tomo tertio etiam extat, in qua modum tradit exprimendi rationem ſubtangentis ad Ordinatam, in terminis quos non ingreditur Ordinata; ubi ſi loco y & dy ipſarum valores vinculo incluſos poſuiſſet, ſtatim ſcopum attigiſſet.

In prima Epiſtola quæ per *Oldenburgum* ad *Leibnitium* tranſmiſſa eſt, docuit *Newtonus* methodum qua quantitates in Series Infinitas reducendæ ſint, *i. e.* qua quantitatum fluentium incrementa exhiberi poſſunt. In ipſo enim initio Seriem oſtendit, cujus Termini hæc incrementa repreſentant. Sed illa D. *Leibnitium* prorſus latebat, ante viſam *Newtoni* Epiſtolam qua exponitur.

Sit o incrementum momentaneum quantitatis fluentis x, & $\frac{m}{n}$ index dignitatis ejuſdem, & ſi pro x ſcribatur $x+o$, $x+2o$, $x+3o$, $x+4o$, &c. et Quantitates $\overline{x+o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+2o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+3o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+4o}|^{\frac{m}{n}}$, &c. in Series Infinitas expandantur, habebimus totidem Series, quarum prima hæc eſt quæ ſequitur, $x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m^2-mn}{2n^2}oox^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}ooox^{\frac{m-3n}{n}}$ &c.

In omnibus Seriebus primus terminus erit ipſa quantitas fluens $x^{\frac{m}{n}}$; & ſi prior quælibet Series a poſteriore auferatur, habebimus harum Serierum differentias primas, in quibus omnibus primus terminus eſt Seriei primæ terminus primus quem ingreditur quantitas o, ſcil. $\frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}}$; & evaneſcente o fit ille terminus differentiis hiſce primis æqualis; vel quod idem eſt, erit quantitas $\frac{m}{n}ox^{\frac{m-n}{n}}$ Fluentis incrementum primum.

Præterea ſi differentia quælibet prior a poſteriori auferatur, devenie- mus ad differentias ſecundas; quarum omnium terminus primus per 2 diviſus,

viſus, idem eſt cum termino ſecundo Seriei primæ quem ingreditur quantitas o; & evaneſcente o fiunt differentiæ illæ per Binarium diviſæ ſingulæ æquales termino illo primo Seriei, qui eſt $\frac{m^2-mn}{2n^2}oox^{\frac{m-2n}{n}}$. Et eodem modo inveniemus ſupra deſcriptæ Seriei terminum $\frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3}ooox^{\frac{m-3n}{n}}$, æqualem eſſe ſingulis differentiis tertiis per ſex diviſis. Et quilibet terminus ejuſdem Seriei ad differentias reſpectivas ſemper habebit datam rationem, ſcil. terminus primus quem ingreditur o æqualis eſt differentiis primis, ſecundus eſt differentiarum ſecundarum pars media, tertius pars ſexta differentiarum tertiarum &c. Haſce Series, quarum termini differentias omnes in infinitum repreſentant, invenit *Newtonus*, uti dixi, ante annum 1665; ſed illæ ante viſam *Newtoni* Epiſtolam, in qua exponitur, D. *Leibnitium* * latebant; nam ante illud tempus agnoſcit *Leibnitius* ſemper ipſi neceſſe fuiſſe tranſmutare quantitatem irrationalem in Fractionem rationalem, & deinde, dividendo *Mercatoris* Methodo, Fractionem in Seriem reducere. Exinde etiam patet Seriem hanc differentias continentem non habuiſſe D. *Leibnitium*, quod poſtquam ipſi per *Oldenburgum* oſtenſa eſt, * rogat ut D. *Newtonus* ipſius originem ſibi pandat.

Sit jam quantitas quælibet ex conſtanti & indeterminatis utcunque compoſita & vinculo incluſa, ſcil. $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$, cujus differentia habenda eſt; conſtat per Regulam prius traditam quantitatis $a+bx^c$ differentiam eſſe $cbx^{c-1}o$ (poſito quod o ſit incrementum momentaneum Fluentis x) quare ſi pro $a+bx^c$ ſcribatur z, & pro $cbx^{c-1}o$ ſcribatur ω, erit $\overline{a+bx^c+cbx^{c-1}o}|^{\frac{m}{n}} = \overline{z+\omega}|^{\frac{m}{n}}$; quæ ſi per regulam *Newtoni* in Seriem expandatur, fit $z^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\omega z^{\frac{m-n}{n}} + \&c.$ cujus Seriei terminus $\frac{m}{n}\omega z^{\frac{m-n}{n}}$ eſt differentia prima quantitatis $z^{\frac{m}{n}}$, ſeu $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$. Unde ſi loco z & ω reſtituantur ipſorum valores, $a+bx^c$ & $cbx^{c-1}o$, habebimus differentiam quantitatis $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}cbx^{c-1}o\times\overline{a+bx^c}|^{\frac{m-n}{n}}$: vel ſi more *Leibnitiano* pro o ponatur dx, erit quantitatis $\overline{a+bx^c}|^{\frac{m}{n}}$ differentia $\frac{m}{n}cbx^{c-1}dx\times\overline{a+bx^c}|^{\frac{m-n}{n}}$; ubi videmus quantitatem differentialem $\frac{m}{n}cbx^{c-1}dx$ extra vinculum ſemper manere. Atque hinc facile fuit D. *Leibnitio*, ope Regulæ *Newtonianæ*, diffe-

* Vide Epiſtolam *Leibnitii* ad *Oldenburgum* 27 *Auguſti* 1676. pag. 63. l. 10.

Digitized by Google

differentias quantitatum omnium exhibere, utcunque quantitates fluentes Surdis aut Fractionibus ſint implicatæ : id quod ante Epiſtolicum illud per *Oldenburgum* cum *Newtono* commercium ipſi minime notum fuit.

Quamvis hæc per ſe ſatis manifeſta ſunt Calculi Differentialis indicia ; in ſecunda tamen Epiſtola quæ per *Oldenburgum* ad *Leibnitium* miſſa eſt, alias adhuc clariores deſcribit *Newtonus* Methodi ſuæ notas. Dicit enim ſe habuiſſe methodum ducendi Tangentes, quam ſolertiſſimus *Sluſius* ante annos duos treſve *Oldenburgo* impertitus eſt, ita ut habito ſuo fundamento nemo poſſet Tangentes aliter ducere, niſi de induſtria a recto tramite erraret. Quinetiam ibi quoque oſtendit "Methodum hanc non hærere "ad æquationes quibus una vel utraque quantitas indefinita radicalibus "involuta eſt ; ſed abſque ulla æquationum reductione (quæ opus ple- "rumque redderet immenſum) Tangentem confeſtim duci, & eodem "modo in quæſtionibus de Maximis & Minimis aliiſque quibuſdam "rem ſic ſe habere. Fundamentum harum Operationum dicit eſſe ſatis "obvium, quod tamen tranſpoſitis literis in illa Epiſtola celare voluit : "hoc etiam adjicit, hoc Fundamento ſpeculationes de Quadraturis Cur- "varum ſimpliciores ſe reddidiſſe ; & ad Theoremata quædam generalia "ſe perveniſſe ſcribit.

Cum vero Methodus *Sluſiana* tunc temporis *Leibnitium* minime latere potuit ; utpote in Actis Philoſophicis *Lond.* publicata : Cumque *Newtonus* dicit eandem & ſibi innotuiſſe, ex fundamento quo habito non hærebat ad æquationes radicalibus utcunque involutas ; (in qua quidem tota rei difficultas poſita eſt.) Cumque in priore Epiſtola Seriem deſcripſit, cujus ope differentiæ haberi poſſunt, ubi Fluentes Surdis aut Fractionibus utcunque implicatæ ſunt : Cum denique idem Fundamentum ad Quadraturas Curvarum ſe applicuiſſe dicit ; minime dubitandum eſt hæc omnia facem *Leibnitio* prætuliſſe, quo facilius Methodum *Newtoni* perſpiceret.

Quod ſi hæc non ſuffeciſſe videantur indicia ; etiam ulterius proceſſit *Newtonus*, & Exempla Methodi ſuæ dedit, & Regulam oſtendit, qua ex datis quarundam Curvarum Ordinatis, earundem Areæ exhibentur in terminis finitis, cum hoc fieri poteſt ; hoc eſt, in Stylo *Leibnitiano*, ipſi exempla tradidit quibus a Differentiis ad Summas pervenitur. Et a ſimplicioribus orſus,* proponit primo Parabolam cujus abſciſſa eſt z, & Ordinatim applicata $\sqrt{az}=a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$, & Curvæ Area erit $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; hoc eſt, quando differentia Areæ eſt $dz \times \sqrt{az}$, ſeu $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} \times dz$, oſtendit fore Aream $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; unde viciſſim concluditur, ſi quantitas differentianda ſit $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$, fore ejus differentiam $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}dz$ ſeu $\frac{3}{2}dz\sqrt{az}$. Exemplum ejus ſecundum eſt Curva cujus abſciſſa eſt z, & Ordinatim-applicata $\frac{a^4 z}{\overline{c^2-z^2}|^2}$: ubi oſtendit *Newtonus*

* Vide pag. 72.

Curvæ

Curvæ Aream fore $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$, hoc eſt ſi differentia Areæ ſit $\frac{a^4 z\,dz}{\overline{c^2 - z^2}|^2}$, oſtendit Aream fore $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$. Unde viciſſim ſi quantitas differentianda ſit $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$, concludi poteſt differentiam fore $\frac{a^4 z \times dz}{\overline{c^2 - z^2}|^2}$. Vel ſi ejuſdem Curvæ Ordinata ſic enuncietur $\frac{a^4}{z^3 \times \overline{c^2 z^{-1} - 1}|^2}$, erit Area $= \frac{a^4 z^2}{2c^4 - 2c^2 z^2}$. Quare & viciſſim, ſi quantitas differentianda ſit $\frac{a^4 z^2}{2c^4 - 2c^2 z^2}$, erit differentia $\frac{a^4 dz}{z^3 \times \overline{c^2 z^{-1} - 1}|^2}$.

Hinc ad exempla quædam difficiliora progreditur *Newtonus*, in iiſque oſtendit, quomodo ab Ordinatis, hoc eſt a Differentiis ad Summas perveniendum ſit: ex quibus patebit, Curvam omnem quadrabilem fore, cujus Ordinata in Differentiam Abſciſſæ ducta ſit quantitatis alicujus differentia; & hinc innumera Curvarum genera aſſignari poſſunt etiam Geometrice quadrabilia.

His indiciis atque his adjutum Exemplis, Ingenium vulgare Methodum *Newtonianam* penitus diſcerneret; ita ut ne ſuſpicari fas ſit, eam acerrimum *Leibnitii* acumen poſſe latuiſſe; quem quidem uſum fuiſſe his ipſis clavibus, ad hæc ſua quæ feruntur inventa, aditum, etiam ex ipſius ore ſatis eluceſſit. Nam in Epiſtola ad *Oldenburgum* data, poſt explicatum Calculum Differentialem, exemplum addit, quod coincidere agnoſcit cum Regula *Sluſiana*, & poſtea addit. * "Sed Methodus ipſa priore "noſtra longe eſt amplior, non tantum enim exhiberi poteſt cum plures "ſint literæ indeterminatæ quam x & y (quod ſæpe fit maximo cum fru-"ctu) ſed & tunc utilis eſt, cum interveniunt Irrationales, quippe quæ "eam nullo morantur modo, neque ullo modo neceſſe eſt Irrationales "tolli; quod in Regula *Sluſii* neceſſe eſt, & Calculi difficultatem in "immenſum auget." Hæc omnia a *Newtono* prius in ſecunda ejus Epiſtola dicta ſunt. Inde Exempla proponit, quorum quidem quod primum eſt, neſcio quo fato, idem prorſus eſt ac id, quod, in ea Epiſtola quam *Leibnitio* tranſmiſerat *Oldenburgus*, etiam primum protulerit *Newtonus*.

Mox addit Vir illuſtriſſimus, * "Arbitror quæ celare voluit *Newtonus* de "Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit ex hoc Fun-"damento Quadraturas quoque reddi faciliores, me in hac ſententia con-"firmat: nimirum ſemper Figuræ illæ quadrabiles, quæ ſunt ad Æqua-"tionem Differentialem. Æquationem Differentialem voco talem qua "valor ipſius dx exprimitur, quæque ex alia derivata eſt, qua valor ip-

* Vide pag. 89, 90.

“ ſius x exprimebatur.” Et paulo poſt, ſuam de hac re Sententiam plenius aperit, dicitque hanc unicam Regulam pro infinitis Figuris quadrandis inſervire, diverſæ plane naturæ ab iis quæ hactenus quadrari ſolebant. Quis eſt jam qui hæc perpendet & non videbit Indicia & Exempla *Newtoni* ſatis a *Leibnitio* perſpecta fuiſſe; ſaltem quoad differentias primas? Nam quoad Differentias ſecundas, *Leibnitium* Methodum *Newtonianam* tardius intellexiſſe videtur, quod brevi forſan clarius monſtrabo.

Interim facile illuſtri Viro aſſentior, & credo eum nec nomen Calculi Fluxionum fando audiviſſe; nec Characteres quos adhibuit *Newtonus* oculis vidiſſe, ante quam in *Walliſianis* operibus prodiere. Obſervo enim ipſum *Newtonum* ſæpius mutaſſe Nomen & Notationem Calculi. In Tractatu de Analyſi Æquationum per Series Infinitas, incrementum Abſciſſæ per literam *o* deſignat: Et in Principiis Philoſophiæ Fluentem quantitatem Genitam vocat, ejuſque incrementum Momentum appellat: Illam literis majoribus A vel B, hoc minuſculis *a* & *b* deſignat.

Id etiam ultra agnoſco, inter cætera quæ de re Mathematica præclare meritus eſt *Leibnitius*, hoc itidem illi deberi, quod primus fuerit qui Calculum hunc typis edidit & in publicum produxit: itaque eo ſaltem nomine magnam apud Matheſeos amantes inibit gratiam, quod Inventum ita nobile, & in multiplices uſus deducendum, diutius eos noluerit latere.

Habes Vir Cl. quæ de hoc argumento ſcribenda duxi, unde facile credo percipies, hoc qualecunque fuerit meum in Gentem noſtram ſtudium, ita parum præpoſterum fuiſſe, ut nihil omnino niſi quod *Newtoni* erat *Leibnitio* detraxerim; nec dubito quin æqui rerum æſtimatores uno ore fateantur me, uti nullo calumniandi animo, ita nec præcipiti Judicio, ea dixiſſe, quæ tibi tot argumentis luce meridiana clarius comprobavi.

Lecta eſt hæc Epiſtola coram Regia Societate, in Conventu die 24° Maii 1711 *habito, & ut Exemplar ejus D.* Leibnitio *mitteretur D.* Sloane *Secretario ſuo mandatum eſt.*

Epiſtola D. Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *M. D. & R. S. Secr.*

QUÆ D. *Johannes Keillius* nuper ad Te ſcripſit, candorem meum apertius quam ante oppugnant: quem ut ego hac ætate, poſt tot documenta vitæ, Apologia defendam, & cum homine docto, ſed novo, & parum perito rerum anteactarum cognitore, nec * mandatum habente ab eo cujus intereſt, tanquam pro Tribunali litigem, nemo prudens æquuſque probabit.

* Quaſi Methodum *Moutoni*, & Series *Brounkeri*, *Walliſii* & *Gregorii* aliorumque Inventa non liceat propriis authoribus, niſi authoritate ab his accepta, aſſerere.

Quæ

Digitized by Google

Quæ ille de meo rem cognoſcendi modo ſuſpicatur, haud ſatis exercitatus artis Inveniendi arbiter, ipſius quidem docendi cauſa non eſt cur refellam: ſed norunt * amici quam longe alio & ad alia proficuo itinere proceſſerim. Fruſtra ad Exemplum Actorum Lipſienſium provocat, ut ſua dicta excuſet; in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, ſed potius paſſim † ſuum cuique tributum. Ego quoque & amici aliquoties oſtendimus libenter a nobis credi, illuſtrem *Fluxionum* Autorem per ſe ad ſimilia noſtris fundamenta perveniſſe. Neque eo minus Ego in Inventoris jura venio, quæ etiam *Hugenius*, judex intelligentiſſimus incorruptiſſimuſque, publice agnovit: in quibus tamen mihi vendicandis ** non properavi, ſed inventum †† pluſquam nonum in annum preſſi, ut nemo me præcucurriſſe queri poſſit.

Itaque veſtræ æquitati committo, annon coercendæ ſint vanæ & injuſtæ vociferationes, quas ‡ ipſi *Newtono*, Viro inſigni & geſtorum optime conſcio, improbari arbitror: ejuſque Sententiæ ſuæ libenter daturum Indicia mihi perſuadeo.

VALE.

Dabam *Hannoveræ*

29 Decemb. 1711.

* Si Amici illi ſunt *Germani*, invenit is hanc Methodum poſt reditum ſuum in *Germaniam*.

† Scripſerat *Keillius* in hæc verba. *Hæc ut ſcriberem impulerunt Actorum Lipſienſium Editores, qui in ea quam exhibent operis* Newtoniani *de Fluxionibus ſeu Quadraturis Enarratione, diſerte affirmant D.* Leibnitium *fuiſſe iſtius Methodi Inventorem, &* Newtonum *aiunt pro Differentiis* Leibnitianis *Fluxiones adhibere ſemperque adhibuiſſe. Leibnitius* Editores hic palam defendit contra *Keillium*, quaſi ſuum cuique reddidiſſent.

** In Epiſtola *Aug.* 27. 1676, properavit ſe coinventorem Methodi Serierum proponere. In Epiſtola *Junii* 21. 1677, properavit Methodum ut ſuam deſcribere, de qua *Newtonus* tractatum ante annos quinque ſcripſerat. In Schedis tribus anno 1689 impreſſis, properavit Propoſitiones principales *Principiorum Philoſophiæ* ad Calculum ſuum revocatas in lucem edere, ut in Inventoris jura veniret.

†† Probandum eſt.

‡ *Newtonus* & *Leibnitius* nec ſunt idonei Judices nec Teſtes. Ex monumentis antiquis judicium ferendum eſt.

Cum D. *Leibnitius* a D. *Keill* ut homine novo ad Societatem Regiam provocaret, Societas juſſit monumenta antiquiora conſuli, & Sociis aliquot qui his examinandis aptiores viderentur in mandatis dedit, ut in hanc rem inquirerent; & quæ in ſcriptis antiquis invenirent ad ſe referrent, una cum eorum Sententia. Et Arbitrorum Conſeſſus collectionem ex Epiſtolis & aliis MSS. ſupra impreſſam ad Societatem retulerunt, una cum eorum Sententia ſequente.

WE have conſulted the Letters and Letter-books in the Cuſtody of the Royal Society, and thoſe found among the Papers of Mr. John Collins, *dated between the Years* 1669 *and* 1677 *incluſive; and ſhewed them to ſuch as knew and avouched the Hands of Mr.* Barrow, *Mr.* Collins, *Mr.* Oldenburg *and Mr.* Leibnitz; *and compar'd thoſe of Mr.* Gregory *with one another, and with Copies of ſome of them taken in the Hand of Mr.* Collins; *and have extracted from them what relates to the Matter referr'd to us; all which Extracts herewith deliver'd to you, we believe to be genuine and authentick: And by theſe Letters and Papers we find,*

I. *That Mr.* Leibnitz *was in* London *in the beginning of the Year* 1673, *and went thence in or about* March *to* Paris, *where he kept a Correſpondence with Mr.* Collins *by means of Mr.* Oldenburg, *till about* September 1676, *and then return'd by* London *and* Amſterdam *to* Hannover: *And that Mr.* Collins *was very free in communicating to able Mathematicians what he had receiv'd from Mr.* Newton *and Mr.* Gregory.

II. *That*

LIteras & Literarum Apographa tam quæ in Archivis Regiæ Societatis, quam quæ inter Chartas D. *Joannis Collinii* aſſervantur, & inter Annos 1669 & 1677 datæ ſunt, inſpeximus; & ex his, quæ D. *Barrovii*, D. *Collinii*, D. *Oldenburgi* & D. *Leibnitii* nomen ferebant, ex fide aliquorum qui eorum autographa probe noverant, ipſorum eſſe certo didicimus. Literas autem quæ *Gregorium* præ ſe ferebant auctorem, ipſius eſſe cognovimus fide *Collinii*, qui nonnullas earum *Gregorio* aſſignatas manu ſua exſcripſerat. Ex his omnibus excerpſimus quæcunque ad rem nobis commiſſam pertinere videbantur; atque illa excerpta quæ una cum ipſis literis jam vobis traduntur, fideliter & accurate facta eſſe comperimus. Ex his autem Literis chartiſq; nobis conſtat.

I. D. *Leibnitium* anno ineunte 1673 *Londini* fuiſſe, unde Menſe *Martio* vel circiter *Pariſios* adiit, ubi Literarum commercium habuit cum D. *Collinio* intercedente *Oldenburgo*, uſque in Menſem *Septembrem* 1676. Deinde per *Londinum* & *Amſtelodamum Hannoveram* reverſum eſſe. D. autem *Collinium* Matheſeos peritis ea quæ a D. *Newtono* & *Gregorio* acceperat lubentiſſime communicaſſe.

II. D. *Leib-*

II. *That when Mr.* Leibnitz *was the firſt time in* London, *he contended for the Invention of another* Differential Method *properly ſo call'd*; *and notwithſtanding that he was ſhewn by Dr.* Pell *that it was* Mouton'*s Method*, *perſiſted in maintaining it to be his own Invention*, *by reaſon that he had found it by himſelf*, *without knowing what* Mouton *had done before*, *and had much improved it*. *And we find no mention of his having any other* Differential Method *than* Mouton's, *before his Letter of* 21*ſt of* June 1677, *which was a Year after a Copy of Mr.* Newton'*s Letter*, *of* 10*th of* December 1672, *had been ſent to* Paris *to be communicated to him*; *and above four Years after Mr.* Collins *began to communicate that Letter to his Correſpondents*; *in which Letter the Method of* Fluxions *was ſufficiently deſcrib'd to any intelligent Perſon.*

III. *That by Mr.* Newton'*s Letter of the* 13*th of* June 1676 *it appears, that he had the Method of* Fluxions *above five Years before the writing of that Letter. And by his* Analyſis per Æquationes numero Terminorum Infinitas, *communicated by Dr.* Barrow *to Mr.* Collins *in* July 1669, *we find that he had invented the Method before that time.*

IV. *That the* Differential Method *is one and the ſame with the* Method *of* Fluxions, *excepting the Name and Mode of Notation*; *Mr.* Leibnitz *calling thoſe Quantities* Differences, *which Mr.* Newton *calls* Moments *or* Fluxions; *and marking them with the Letter* d, *a Mark*

II. D. *Leibnitium*, cum prima vice *Londinum* adiit, Methodi cujuſdam Differentialis, proprie ſic dictæ, ſe Inventorem perhibuiſſe: Et etiamſi D. *Pellius* ipſi monſtraverat eandem antea a D. *Moutono* uſurpatam fuiſſe, haud tamen ſibi Inventoris jura aſſerere deſtitiſſe; cum quia proprio ut aiebat marte ſua illa inveniſſet, nondum viſis iis quæ *Moutonus* prius ediderat, tum quia plurima adjeciſſet. Neque uſquam mentionem reperimus factam alterius Methodi ejus Differentialis præter iſtam *Moutoni*, ante Literas ejus 21 *Junii* 1677 datas; hoc eſt, Anno integro poſtquam D. *Newtoni* Epiſtola, 10 *Decembris* 1672 ſcripta, *Pariſios* ipſi communicanda tranſmiſſa fuit; & quadriennio poſtquam D. *Collinius* eandem Epiſtolam cum Amicis communicare cœpit. In hac autem Epiſtola Methodus Fluxionum idoneo harum rerum cognitori evidenter ſatis deſcribitur.

III. Ex Literis D. *Newtoni* 13 *Junii* 1676 datis, manifeſtum eſt Fluxionum Methodum ipſi innotuiſſe, quinquennio prius quam Epiſtolam illam ſcriberet. Et ex *Analyſi* ejus *per Æquationes numero Terminorum Infinitas*, quam D. *Barrovius* cum D. *Collinio* Menſe *Julio* Anni 1669 communicavit, conſtat illum etiam ante illud tempus eandem excogitaſſe.

IV. *Methodus Differentialis* una eademque eſt cum *Methodo Fluxionum*, ſi Nomen & Notationis modum exceperis. D. *Leibnitius* enim eas quantitates *Differentias* appellat quas D. *Newtonus Momenta* vel *Fluxiones*: eaſque nota literæ [d] deſignat, quam non adhiber

Mark not uſed by Mr. Newton. *And therefore we take the proper Queſtion to be, not who invented this or that Method, but who was the firſt Inventor of* the Method. *And we believe that thoſe who have reputed Mr.* Leibnitz *the firſt Inventor, knew little or nothing of his Correſpondence with Mr.* Collins *and Mr.* Oldenburg *long before; nor of Mr.* Newton*'s having that Method above Fifteen Years before Mr.* Leibnitz *began to publiſh it in the* Acta Eruditorum *of* Leipſick.

For which Reaſons, we reckon Mr. Newton *the firſt Inventor; and are of Opinion, that Mr.* Keill *in aſſerting the ſame, has been no ways injurious to Mr.* Leibnitz. *And we ſubmit to the Judgment of the Society, whether the Extract of Letters and Papers now preſented to you, together with what is extant to the ſame purpoſe in Dr.* Wallis*'s third Volume, may not deſerve to be made Publick.*

adhibet D. *Newtonus*. Rem proinde de qua agimus hanc autumamus eſſe; non Uter hanc uter illam Methodum invenerit; ſed Uter Methodum ipſam, quæ unica eſt, prior invenerit. Simul illos qui D. *Leibnitium* pro Inventore primo habuere, de eo quod inter illum & D. *Collinium* olim intercefferat commercio parum aut nihil reſciviſſe opinamur; neque intellexiſſe D. *Newtonum* eadem Methodo uſum eſſe, quindecim prius annos quam D. *Leibnitius* eam in Actis Eruditorum *Lipſiæ* evulgare cœpit.

Quibus perpenſis, D. *Newtonum* primum eſſe hujus Methodi Inventorem arbitramur; atque ideo D. *Keillium*, eandem illi aſſerendo, nullo modo D. *Leibnitium* calumnia aut injuria affeciſſe. Judicio autem Societatis permittimus, utrumne Excerpta Literarum, reliquæque chartæ his ſubnexæ, una cum iis quæ extant in tertio Volumine Operum D. *VValliſii* huc ſpectantibus, ſimul imprimi & in publicum prodire mereantur.

His autem Die Aprilis 24° 1712 *acceptis, Societas Regia collectionem Epiſtolarum & MSS^torum^, & Sententiam Conſeſſus imprimi juſſit; ut & quicquid amplius ad hanc Hiſtoriam elucidandam idoneum in Actis Eruditorum occurreret.*

F I N I S.

Digitized by Google